ES Test per malattia

Sensibilità

93.4 % $\mathbb{P}$(test positivo | malato)
6.6 % $\mathbb{P}$(test negativo | malato) falso negativo

Specificità
99.9 % $\mathbb{P}$(test negativo | sano)
0.1 % $\mathbb{P}$(test positivo | sano) falso positivo

(a) Se il test risulta positivo, qual è la probabilità di essere malato?
(b) Se il test risulta negativo, qual è la probabilità di essere malato?

Ω = {popolazione} B_1 = {sani}, B_2 = {malati}
A = {test positivo} A^c = {test negativo}

(a) $\mathbb{P}(B_2 | A) = ?$

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2)\,\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A|B_1)\,\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\,\mathbb{P}(B_2)}$$

$\mathbb{P}(A|B_1) = \mathbb{P}$(test positivo | sano) $= 0.001$

$$\mathbb{P}(A \mid B_2) = \mathbb{P}(\text{test positivo} \mid \text{malato}) = 0.934$$

$$\mathbb{P}(B_2) = p \qquad \mathbb{P}(B_1) = 1-p$$

$$\mathbb{P}(B_2 \mid A) = \frac{0.934\,p}{0.001\,(1-p) + 0.934\,p} \geq 0.95$$

$$\Longleftrightarrow \quad p \geq 0.019937 \quad , \quad \mathbb{P}(B_2) \geq 2\%$$

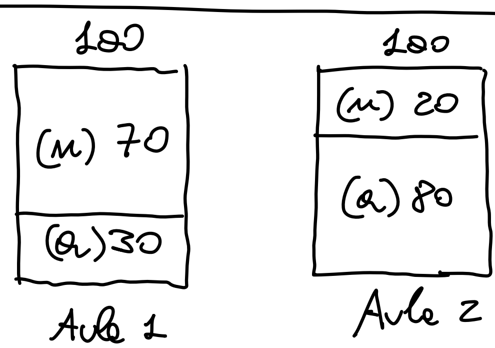
(b) $\mathbb{P}(B_2 \mid A^c) = ?$

$$\mathbb{P}(B_2 \mid A^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c \mid B_2)\,\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A^c \mid B_1)\,\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A^c \mid B_2)\,\mathbb{P}(B_2)}$$

$$= \frac{0.066 \cdot p}{0.999\,(1-p) + 0.066\,p} \leq 0.05$$

$$\Longleftrightarrow \quad p \leq 0.443409 \quad , \quad \mathbb{P}(B_2) \leq 44.35\,\%$$

<u>ES</u> Due aule



Uno studente viene mandato dall'aula 1 all'aula 2.

Poi uno studente viene " " 2 " 1.

Sapendo che lo stud. che va in aula 1 è (a), qual è la probabilità che adesso ci sia un appassionato in più in aula 1?

$\longleftrightarrow$

$B_1 = \{$ studente da aula 1 ad aula 2 è (e) $\}$

$B_2 = \{$ " " " " " " " (m) $\}$

$A = \{$ studente da aula 2 ad aula 1 è (e) $\}$

$$\mathbb{P}(B_2 | A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2)\,\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2)}$$

$$\mathbb{P}(A|B_1) = \frac{81}{101}$$

(m) 20
(e) 81

Aula 2

$$\mathbb{P}(A|B_2) = \frac{80}{101}$$

(m) 21
(e) 80

Aula 2

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{30}{100} \qquad \mathbb{P}(B_2) = \frac{70}{100}$$

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\frac{80}{101}\cdot\frac{70}{100}}{\frac{81}{101}\cdot\frac{30}{100} + \frac{80}{101}\cdot\frac{70}{100}} \sim \frac{0.792 \times 0.7}{0.802\times 0.3 + 0.792 \times 0.7}$$

$$\sim \frac{0.5544}{0.2406 + 0.5544} \sim 0.697$$

Eventi indipendenti (indipendenza stocastica)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Def. Due eventi $A, B \in \mathcal{A}$ si dicono INDIPENDENTI se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

- Un insieme di n eventi $A_1, \dots, A_n$ si dice di eventi indipendenti se $\forall k = 2, \dots, n$ e $\forall\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ si ha

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_j})$$

OSS Due eventi A, B sono indipendenti se e solo se $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

OSS Ripetizioni di un esperimento nelle stesse condizioni danno luogo ad eventi indipendenti.

ES Sia data un'urna con 10 palline, di cui 7 rosse e 3 blu.
Calcolare la probabilità che effettuando 5 estrazioni con reimmissione si ottenga esattamente una pallina blu.

$$\Omega = \{RRRRR, RRRRB, \dots, BBBBB\}$$

$\mathbb{P}(\{RRRRR\}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) =$

$A_i = \{$ l'estrazione i-esima è R $\}$

$= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(A_4)\mathbb{P}(A_5) = \left(\frac{7}{10}\right)^5$

$\mathbb{P}(\{RRRRB\}) = \mathbb{P}(\{RRBRR\}) = \ldots$

$C = \{$ ottenere esattamente una pallina blu in 5 estrazioni con reimmissione $\}$

$$\mathbb{P}(C) = \binom{5}{1} \cdot \mathbb{P}(R)^4 \cdot \mathbb{P}(B)^1 = 5 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^4 \cdot \frac{3}{10}$$

$C = \{RRRRB, RRRBR, RRBRR, \ldots\}$

$\mathbb{P}($ ottenere esattamente 2 blu in 5 est. con reim $) =$

$$= \binom{5}{2} \mathbb{P}(R)^3 \cdot \mathbb{P}(B)^2$$

<u>OSS</u> • Se A e B sono eventi indipendenti allora

$\left.\begin{array}{l} A^c \text{ e } B \\ A \text{ e } B^c \\ A^c \text{ e } B^c \end{array}\right\}$ sono indipendenti

<u>dim</u> $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) =$

$= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) =$

$= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A))$

$= \mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}(A^c)$

- Se A e B sono eventi incompatibili e non trascurabili, non possono essere indipendenti

$$0 = \mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)$$

- Se A è un evento trascurabile oppure quasi certo, è indipendente da ogni altro B.

<u>dim</u> Se $\mathbb{P}(A) = 0$, per ogni $B \in \mathcal{A}$.

$$0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \mathbb{P}(A \cap B), \quad \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B) = 0.$$

<u>ES</u> $A = \{$ 90 è estratto all'$(n+1)$-esima estraz. $\}$

$B = \{$ 90 non viene estratto nelle prime n estraz. $\}$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1}{90} = \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{90^n}{90^{n+1}} = \frac{1}{90}$$

A e B sono eventi indipendenti

<u>ES</u> Lanciamo due volte un dado a 6 facce equip.

$A = \{$ somma dei due lanci sia 7 $\}$

$B = \{$ al primo lancio si ottiene 4 $\}$

$C = \{$ al secondo lancio si ottiene 3 $\}$

- B e C sono indipendenti
- A e B " "
- A e C " "

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}}{\#\Omega} =$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = \{(4,3)\} = A \cap C \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{36}$$

- A, B e C non sono indipendenti

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6^3}$$