

Esercizi di riepilogo su Analisi Matematica e Statistica

1. Determinare il dominio naturale D delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(a) f(x) = \log(1 - e^x) \quad (b) f(x) = \frac{\sin(x^2 + 1)}{2x^3 + 16} \quad (c) f(x) = \log(1 + \cos x)$$

$$(d) f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6} \quad (e) f(x) = \log(\sqrt{2} - \sqrt{x^4 + x^2}) \quad (f) f(x) = \frac{1}{\log(|x - 1|)}$$

2. Determinare l'insieme C dei punti nel quale le seguenti funzioni sono continue:

$$(a) f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x \geq 0; \\ x + 1, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (b) f(x) = \sin(1 + |x|) \quad (c) f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} \log(1 + x), & \text{se } x \neq 0; \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad (e) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x > 0; \\ -1, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

3. Classificare le discontinuità trovate nell'esercizio 2.

4. Trovare gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui a $+\infty$ per le seguenti funzioni:

$$(a) f(x) = \frac{x^4 + x^3}{2x^3 + x^2} \quad (b) f(x) = x + x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (c) f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x}$$

$$(d) f(x) = \log(1 + e^x) \quad (e) f(x) = \log\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)$$

5. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

$$(a) f(x) = |x + 1| \quad (b) f(x) = \sin(2x) \quad (c) f(x) = \log(1 + x^2)$$

$$(d) f(x) = e^{|x|} \quad (e) f(x) = \sqrt[4]{x - 2} \quad (f) f(x) = x^3 + x - 1$$

6. Disegnare il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con dominio naturale $D = \mathbb{R}$, tale che $f(0) = 0$ e la sua derivata sia

$$f'(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \in [1, +\infty); \\ 0, & \text{se } x \in [0, 1); \\ -3x^2, & \text{se } x \in [-1, 0); \\ -x - 2, & \text{se } x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

Discutere l'esistenza di punti di massimo locale o di minimo locale.

7. Un campione statistico x contiene i seguenti dati

$$x = \{2, -1, 1, 0, 2, 3, 1, 0, -1, 1, 2, 2, 1, 2, 0\}$$

Rappresentare il campione con un istogramma, e calcolare media, varianza e scarto quadratico medio del campione.

8. Si lancino contemporaneamente due dadi onesti a sei facce numerati da 1 a 6 e si sommino gli esiti, ottenendo quindi un numero tra 2 e 12. Si consideri la variabile aleatoria X che, indicando con ω la somma degli esiti, è definita da

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in \{2\}; \\ 2, & \text{se } \omega \in \{3, 4, 5\}; \\ 3, & \text{se } \omega \in \{6, 7, 8\}; \\ 4, & \text{se } \omega \in \{9, 10, 11\}; \\ 5, & \text{se } \omega \in \{12\}. \end{cases}$$

Calcolare la legge di X , e le sue media, varianza e scarto quadratico medio.

9. Scrivere la densità di una variabile aleatoria gaussiana con media $m = 1$ e varianza $\sigma^2 = 5$.

Soluzioni

1. (a) $D = (-\infty, 0)$; (b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; (c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
(d) $D = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$; (e) $D = (-1, 1)$; (f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$.
2. (a) $C = \mathbb{R}$; (b) $C = \mathbb{R}$; (c) $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; (d) $C = (-1, +\infty) \setminus \{0\}$; (e) $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. (c) Seconda specie. (d) Eliminabile. (e) Prima specie.
4. (a) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$; (b) $y = x + 1$; (c) non esiste; (d) $y = x$; (e) $y = 0$.
5. Usare ad esempio il sito <https://www.desmos.com/calculator?lang=it>
6. La funzione $f(x)$ da disegnare (ad esempio sul sito indicato sopra) è
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}, & \text{se } x \in [1, +\infty); \\ 0, & \text{se } x \in [0, 1); \\ -x^3, & \text{se } x \in [-1, 0); \\ -\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}, & \text{se } x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$
7. $\bar{x} = 1$; $\text{var}(x) = 1,33$; $\sigma(x) = 1,15$.
8. La legge di X è
- $$p(1) = \frac{1}{36}, \quad p(2) = \frac{9}{36}, \quad p(3) = \frac{16}{36}, \quad p(4) = \frac{9}{36}, \quad p(5) = \frac{1}{36}.$$
- $E[X] = 3$; $\text{var}(X) = 0,72$; $\sigma(X) = 0,85$.
9. La densità di $N(1, 5)$ è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{10}}$$