

## Esercizi di riepilogo su Analisi Matematica e Statistica

**1.** Determinare il dominio naturale  $D$  delle seguenti funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(a) f(x) = \log(1 - e^x) \quad (b) f(x) = \frac{\sin(x^2 + 1)}{2x^3 + 16} \quad (c) f(x) = \log(1 + \cos x)$$

$$(d) f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6} \quad (e) f(x) = \log\left(\sqrt{2} - \sqrt{x^4 + x^2}\right) \quad (f) f(x) = \frac{1}{\log(|x - 1|)}$$

**2.** Determinare l'insieme  $C$  dei punti nel quale le seguenti funzioni sono continue:

$$(a) f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x \geq 0; \\ x + 1, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (b) f(x) = \sin(1 + |x|) \quad (c) f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} \log(1 + x), & \text{se } x \neq 0; \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad (e) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x > 0; \\ -1, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

**3.** Classificare le discontinuità trovate nell'esercizio 2.

**4.** Trovare gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui a  $+\infty$  per le seguenti funzioni:

$$(a) f(x) = \frac{x^4 + x^3}{2x^3 + x^2} \quad (b) f(x) = x + x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (c) f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x}$$

$$(d) f(x) = \log(1 + e^x) \quad (e) f(x) = \log\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)$$

**5.** Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

$$(a) f(x) = |x + 1| \quad (b) f(x) = \sin(2x) \quad (c) f(x) = \log(1 + x^2)$$

$$(d) f(x) = e^{|x|} \quad (e) f(x) = \sqrt[4]{x - 2} \quad (f) f(x) = x^3 + x - 1$$

**6.** Disegnare il grafico di una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con dominio naturale  $D = \mathbb{R}$ , tale che  $f(0) = 0$  e la sua derivata sia

$$f'(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \in [1, +\infty); \\ 0, & \text{se } x \in [0, 1); \\ -3x^2, & \text{se } x \in [-1, 0); \\ -x - 2, & \text{se } x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

Discutere l'esistenza di punti di massimo locale o di minimo locale.

**7.** Un campione statistico  $x$  contiene i seguenti dati

$$x = \{2, -1, 1, 0, 2, 3, 1, 0, -1, 1, 2, 2, 1, 2, 0\}$$

Rappresentare il campione con un istogramma, e calcolare media, varianza e scarto quadratico medio del campione.

**8.** Si lancino contemporaneamente due dadi onesti a sei facce numerati da 1 a 6 e si sommino gli esiti, ottenendo quindi un numero tra 2 e 12. Si consideri la variabile aleatoria  $X$  che, indicando con  $\omega$  la somma degli esiti, è definita da

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in \{2\}; \\ 2, & \text{se } \omega \in \{3, 4, 5\}; \\ 3, & \text{se } \omega \in \{6, 7, 8\}; \\ 4, & \text{se } \omega \in \{9, 10, 11\}; \\ 5, & \text{se } \omega \in \{12\}. \end{cases}$$

Calcolare la legge di  $X$ , e le sue media, varianza e scarto quadratico medio.

**9.** Scrivere la densità di una variabile aleatoria gaussiana con media  $m = 1$  e varianza  $\sigma^2 = 5$ .

## Soluzioni

**1.** (a)  $D = (-\infty, 0)$ ; (b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ; (c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ;  
 (d)  $D = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$ ; (e)  $D = (-1, 1)$ ; (f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ .

**2.** (a)  $C = \mathbb{R}$ ; (b)  $C = \mathbb{R}$ ; (c)  $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; (d)  $C = (-1, +\infty) \setminus \{0\}$ ; (e)  $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**3.** (c) Seconda specie. (d) Eliminabile. (e) Prima specie.

**4.** (a)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ ; (b)  $y = x + 1$ ; (c) non esiste; (d)  $y = x$ ; (e)  $y = 0$ .

**5.** Usare ad esempio il sito <https://www.desmos.com/calculator?lang=it>

**6.** La funzione  $f(x)$  da disegnare (ad esempio sul sito indicato sopra) è

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}, & \text{se } x \in [1, +\infty); \\ 0, & \text{se } x \in [0, 1); \\ -x^3, & \text{se } x \in [-1, 0); \\ -\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}, & \text{se } x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

**7.**  $\bar{x} = 1$ ;  $var(x) = 1,33$ ;  $\sigma(x) = 1,15$ .

**8.** La legge di  $X$  è

$$p(1) = \frac{1}{36}, \quad p(2) = \frac{9}{36}, \quad p(3) = \frac{16}{36}, \quad p(4) = \frac{9}{36}, \quad p(5) = \frac{1}{36}.$$

$E[X] = 3$ ;  $var(X) = 0,72$ ;  $\sigma(X) = 0,85$ .

**9.** La densità di  $N(1, 5)$  è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{10}}$$