Esercizi di riepilogo su Algebra Lineare

1. Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare in due variabili ammette soluzioni, e nel caso determinarle:

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ k^2x + ky = 0 \end{cases}$$

2. Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare in tre variabili ammette soluzioni, e nel caso determinarle:

$$\begin{cases} kx - ky = 0 \\ 2y + 2z = 2 \\ kx - y = 0 \end{cases}$$

3. Trovare al variare di $k \in \mathbb{R}$ i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali ai vettori

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Dire se il seguente sistema lineare in quattro variabili ammette soluzioni, e nel caso determinarle:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_4 = 1 \end{cases}$$

5. Data l'equazione lineare in tre variabili

$$x - y + 2z = 3$$

dire quale dei seguenti insiemi è lo spazio delle soluzioni (non risolvere l'equazione, ragionare sulle possibili soluzioni):

$$W_1 = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}; \quad W_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}; \quad W_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\};$$

6. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste l'inversa della seguente matrice A, e in caso determinare A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare in due variabili ammette soluzioni, e nel caso determinarle:

$$\begin{cases} x + y = k \\ x + 2y = 0 \\ x + ky = 0 \end{cases}$$

8. Trovare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Trovare la retta in $\mathbb{R}^3$ ortogonale ai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e passante per il punto

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzioni

1. Il sistema ammette soluzioni per $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$. Per $k \neq 0$, c'è un'unica soluzione data da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{1-k^2} \\ -\frac{k}{1-k^2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Per $k = 0$, lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 ed è dato da

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Span \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Il sistema ammette soluzioni per ogni $k \in \mathbb{R}$. Per $k = 0$, lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 ed è dato da

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + Span \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k = 1$, lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 ed è dato da

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + Span \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, c'è un'unica soluzione data da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Per $k = 0$ i vettori sono quelli nello spazio

$$W = Span \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq 0$ i vettori sono quelli nello spazio

$$W = Span \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Si verifica che la matrice dei coefficienti e la matrice completa hanno entrambe rango 3. Quindi il sistema ammette come soluzioni uno spazio affine di dimensione 1. Si trova

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Span \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. L'equazione lineare data è non omogenea e ha matrice dei coefficienti e matrice completa di rango 1. Quindi il sistema ammette come soluzioni uno spazio affine di dimensione 2. Ne segue che: W_1 non può essere l'insieme delle soluzioni perché è un sottospazio vettoriale; W_2 non può essere l'insieme delle soluzioni perché ha dimensione 1. Tra quelli rimanenti, W_4 non può essere l'insieme delle soluzioni perché ha in realtà dimensione 1, infatti i vettori che lo generano sono linearmente dipendenti. Dunque l'unica possibilità è che l'insieme delle soluzioni sia W_3. Si verifica infatti che il vettore

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è una soluzione particolare dell'equazione, e che i vettori che generano W_3 sono linearmente indipendenti e soluzioni dell'equazione lineare omogenea associata.

6. Si trova $\det(A) = -2k$, quindi la matrice ha inversa per $k \neq 0$. In questo caso si trova che

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{k} & 1 & \frac{1-k}{2k} \\ \frac{1}{k} & 0 & -\frac{1}{2k} \end{pmatrix}$$

7. Il sistema ammette soluzioni per $k \in \{0, 2\}$, e in entrambi i casi la soluzione è unica. Per $k = 0$, la soluzione è data da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per $k = 2$, la soluzione è data da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

8. Gli autovalori sono $\ell_1 = 2$ e $\ell_2 = -1$. Gli autovettori di $\ell_1 = 2$ sono

$$W_1 = Span \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Gli autovettori di $\ell_2 = -1$ sono

$$W_2 = Span \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. La retta cercata è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Quindi è l'insieme

$$W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Span \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$