Matematica III
Corso di Ingegneria delle Telecomunicazioni
Seconda prova in itinere del 19-12-2006
Svolgimento

Esercizio 1. (10 punti)
Calcolare usando il metodo dei residui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2}\, dx$$

Usando il suggerimento scriviamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2}\, dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\, dx\right)$$

Poniamo poi

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}$$

e integriamo lungo il cammino chiuso $\gamma_R = \Gamma_{1,R} \cup \Gamma_{2,R}$ dove

$$\Gamma_{1,R}(t) = (t,0) \qquad t \in [-R,R]$$

$$\Gamma_{2,R}(\vartheta) = R\, e^{i\vartheta} \qquad \vartheta \in [0,\pi]$$

I punti singolari di $f(z)$ coincidono con gli zeri del polinomio al denominatore, e sono

$$z_1 = -1+i \qquad z_2 = -1-i$$

Applicando allora il teorema dei residui, troviamo per R abbastanza grande

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_{1,R}} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_{2,R}} f(z)\, dz = 2\pi i \text{ Res } (f, z_1)$$

Studiamo i vari termini. Si ha

$$\int_{\Gamma_{1,R}} f(z)\, dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{it}}{t^2+2t+2}\, dt$$

$$\left|\int_{\Gamma_{2,R}} f(z)\, dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos\vartheta}e^{-R\sin\vartheta} iRe^{i\vartheta}}{R^2e^{2i\vartheta}+2Re^{i\vartheta}+2}\, d\vartheta\right| \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{R\, e^{-R\sin\vartheta}}{|R^2e^{2i\vartheta}+2Re^{i\vartheta}+2|}\, d\vartheta \leq \int_0^{\pi} \frac{R\, e^{-R\sin\vartheta}}{R^2-2R-2}\, d\vartheta \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-2R-2}\, d\vartheta = \frac{\pi R}{R^2-2R-2} = O\left(\frac{1}{R}\right) \qquad \text{per } R \to \infty$$

$$\text{Res }(f, z_1) = \text{ Res }\left(\frac{e^{iz}}{(z+1-i)(z+1+i)}, -1+i\right) = \frac{e^{-i-1}}{2i}$$

Quindi troviamo

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\ dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\ dx = 2\pi i\ \frac{e^{-i-1}}{2i} = \frac{\pi\ e^{-i}}{e}$$

Se ne deduce infine che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2}\ dx = \Re\left(\frac{\pi\ e^{-i}}{e}\right) = \frac{\pi\ \cos(1)}{e}$$

Esercizio 2. (6 punti)
Scrivere le soluzioni generali dei seguenti problemi di Cauchy:

$$(I) \qquad \begin{cases} x'(t) = -t \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$(II) \qquad \begin{cases} x'(t) = -x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Entrambi i problemi di Cauchy sono a variabili separabili. Quindi scriviamo

$$(I) \qquad \int_{x_0}^{x(t)} dy = \int_{t_0}^{t} -s\ ds$$

da cui otteniamo

$$(I) \qquad x(t) = x_0 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t_0^2 \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

Per il secondo problema se $x_0 \neq 0$

$$(II) \qquad \int_{x_0}^{x(t)} -\frac{1}{y^2}\ dy = \int_{t_0}^{t} ds$$

da cui otteniamo

$$(II) \qquad \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x_0} = t - t_0$$

e quindi

$$(II) \qquad x(t) = \frac{1}{t - t_0 + \frac{1}{x_0}} \qquad \text{per} \begin{cases} t \in (t_0 - \frac{1}{x_0}, +\infty) & \text{se } x_0 > 0 \\ t \in (-\infty, t_0 - \frac{1}{x_0}) & \text{se } x_0 < 0 \end{cases}$$

Se invece $x_0 = 0$ si trova $x(t) \equiv 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. (20 punti)
Sia $f(t,x)$ la funzione

$$f(t,x) = -\min\left\{t, x^2\right\}$$

a) (4 punti) studiare esistenza e unicità locale delle soluzioni del problema di Cauchy

$$(\mathbf{P}) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

La funzione $f(t,x)$ è definita come

$$f(t,x) = \begin{cases} -t & \text{per } t \leq x^2 \\ -x^2 & \text{per } t \geq x^2 \end{cases}$$

La continuità è immediata. Inoltre che la funzione sia localmente di Lipschitz in x uniformemente rispetto a t è immediato nell'intorno di punti (t,x) per cui $t \neq x^2$.

Sia (t_0, x_0) tale che $t_0 = x_0^2$, allora presi x_1, x_2 distinti in un intorno di x_0 e t in un intorno di t_0 troviamo

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1^2 > t \text{ e } x_2^2 > t \\ |-x_1^2 + x_2^2| & \text{se } x_1^2 < t \text{ e } x_2^2 < t \\ |-x_1^2 + t| \leq |-x_1^2 + x_2^2| & \text{se } x_1^2 < t \text{ e } x_2^2 > t \\ |-t + x_2^2| \leq |-x_1^2 + x_2^2| & \text{se } x_1^2 > t \text{ e } x_2^2 < t \end{cases}$$

quindi la funzione è di Lischitz in un intorno limitato di (t_0, x_0) della forma $\mathbb{R} \times (x_0 - M, x_0 + M)$ per qualsiasi costante positiva M.

b) (8 punti) scrivere esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy (P) con condizione iniziale $x(0) = \frac{3}{2}$;

La soluzione $x(t)$ che cerchiamo risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -t \\ x(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

per $t \in (-\infty, t_1)$ dove t_1 è la soluzione finita (se non esiste si pone $t_1 = +\infty$) di $x^2(t_1) = t_1$ e $x(t_1) > 0$. Innanzitutto, poiché $x(t)$ decresce per $t > 0$, siamo sicuri che t_1 esiste finita. In $(-\infty, t_1)$ la soluzione cercata è

$$x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2} \qquad t \in (-\infty, t_1)$$

quindi t_1 è soluzione del sistema

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2} \geq 0 \\ t^4 - 6t^2 - 4t + 9 = 0 \end{cases}$$

Si trova che $t_1 = 1$ verifica il sistema.

Per $t \geq t_1 = 1$ e finché $f(t, x(t)) = -x^2(t)$, la soluzione risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -x^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

e continua a essere decrescente. Quindi la soluzione risolve il sistema di sopra per $t \in (1, t_2)$ dove t_2 è la soluzione finita maggiore di t_1 (se non esiste si pone $t_1 = +\infty$) di $x^2(t_2) = t_2$ e $x(t_2) < 0$. Risolvendo il sistema troviamo

$$x(t) = \frac{1}{t} \qquad t \geq 1$$

quindi t_2 non esiste.

In definitiva la soluzione cercata è la funzione

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2} & \text{per } t \in (-\infty, 1] \\ \frac{1}{t} & \text{per } t \in [1, +\infty) \end{cases}$$

c) (8 punti) studiare il comportamento delle soluzioni del problema di Cauchy (P) con condizione iniziale $x(0) = x_0$ al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$: cosa succede per $t < 0$?

Dalla definizione di $f(t, x)$ si trova che per $t < 0$ $f(t, x) = -t$. Quindi tutte le soluzioni sono della forma $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + x_0$ per $t \leq 0$.

per $t > 0$ si trovano comportamenti diversi per $x_0 > 0$, $x_0 = 0$, $0 > x_0 > C$ e $C \geq x_0$. Descriverli con la maggiore accuratezza possibile e caratterizzare C (non trovarla esplicitamente, basta dire che esiste e quale equazione soddisfa). (ATTENZIONE: questo svolgimento contiene molta più accuratezza di quella richiesta)

Per $x_0 = 0$, si trova $x(t) \equiv 0$ per $t \geq 0$.

Per $x_0 > 0$, il comportamento qualitativo della soluzione è analogo a quello della soluzione del punto b). Inoltre la soluzione non può diventare negativa per l'unicità locale della soluzione (essendo $x(t) \equiv 0$ per $t > 0$ soluzione).

Per $x_0 < 0$ il comportamento cambia a secondo che la parabola $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + x_0$ intersechi o no la curva $x = -\sqrt{t}$. Definiamo

$$F(t) = \frac{1}{2}t^2 - \sqrt{t} - x_0$$

allora l'intersezione avviene se e solo se esiste $\bar{t}$ tale che $F(\bar{t}) = 0$. Studiamo allora la funzione $F(t)$ per $t > 0$. Troviamo $F(0) = -x_0 > 0$. Calcolando la derivata prima abbiamo

$$F'(t) = t - \frac{1}{2\sqrt{t}} \begin{cases} < 0 & t < \tau := \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ = 0 & t = \tau := \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ > 0 & t > \tau := \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

Quindi si ricava che esiste $\bar{t}$ tale che $F(\bar{t}) = 0$ se e solo se $F(\tau) \leq 0$. Sostituendo τ in $F(t)$ troviamo che $F(\tau) \leq 0$ se e solo se

$$x_0 \geq C = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{2^7} - 1 \right)$$

Per $x_0 \leq C$ la soluzione è la parabola $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + x_0$ per ogni $t \geq 0$.

Invece per $0 > x_0 > C$, la parabola $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + x_0$ verifica $x^2(t) = t$ e $x(t) < 0$ per un valore finito t_1. Quindi per $t > t_1$ e finché $x(t) \geq -\sqrt{t}$, la soluzione deve risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -x^2 \\ x(t_1) = -\sqrt{t_1} \end{cases}$$

Si trova

$$x(t) = \frac{1}{t - t_1 - \frac{1}{\sqrt{t_1}}}$$

che tende a $-\infty$ per $t \to (t_1 + \frac{1}{\sqrt{t_1}})^-$. Quindi esiste un $t_2 < t_1 + \frac{1}{\sqrt{t_1}}$ in cui la soluzione soddisfa $x(t_2) = -\sqrt{t_2}$. Se ne deduce che per $t \geq t_2$ la soluzione soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -t \\ x(t_2) = -\sqrt{t_2} \end{cases}$$

Dunque per $0 > x_0 > C$ la soluzione è

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + x_0 & \text{per } t \in (-\infty, t_1] \\ \frac{1}{t - t_1 - \frac{1}{\sqrt{t_1}}} & \text{per } t \in [t_1, t_2] \\ -\frac{1}{2}(t^2 - t_2^2) - \sqrt{t_2} & \text{per } t \in [t_2, +\infty) \end{cases}$$