Matematica III
Corso di Ingegneria delle Telecomunicazioni
Prima prova in itinere del 10-11-2006
Svolgimento

Esercizio 1. (6 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2y$$

a) (2 punti) determinare i punti critici di f*, i punti di minimo locale, di massimo locale e di sella;*

la funzione $f(x, y)$ è ben definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, i suoi punti critici sono le soluzioni di $\nabla f = 0$. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2$$

da cui ricaviamo che l'unico punto critico è

$$P = (x_0, y_0) = \mathbf{j}$$

Per studiare di che tipo di punto critico di tratta calcoliamo la matrice Hessiana $H(f)$

$$H(f)(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana è definita positiva, e quindi P è un punto di minimo locale;

b) (4 punti) calcolare massimo e minimo di $f(x, y)$ *sull'insieme*

$$Q = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1 \ ; \ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

non ci sono punti critici di $f(x, y)$ all'interno di Q, quindi ci restringiamo al bordo ∂Q. Si trova che ∂Q è l'unione di due curve

$$\gamma_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1 \ ; \ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = y \right\}$$

$$\gamma_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1 \ ; y = \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

Studiamo $f|_{\gamma_1}$. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definiamo

$$\phi_1(x, y, \lambda) = 2x^2 + y^2 - 2y + \lambda(2y - x^2 + 1)$$

e cerchiamo i punti critici di ϕ_1. Si trova

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, y, \lambda) = x(4 - 2\lambda)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2(y - 1 + \lambda)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 2y - x^2 + 1$$

e l'unica soluzione è il punto $(0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Quindi registriamo il valore

$$f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

Annotiamo anche i valori al bordo della nostra curva, quindi

$$f(-1, 0) = f(1, 0) = 2$$

Passiamo a $f|_{\gamma_2}$. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definiamo

$$\phi_2(x, y, \lambda) = 2x^2 + y^2 - 2y + \lambda\left(y - \sqrt{1 - x^2}\right)$$

e cerchiamo i punti critici di ϕ_2. Si trova

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x, y, \lambda) = x\left(4 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y - 2 + \lambda$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = y - \sqrt{1 - x^2}$$

e l'unica soluzione è il punto $(0, 1, 0)$[1]. Quindi registriamo il valore

$$f(0, 1) = -1$$

Annotiamo anche i valori al bordo della nostra curva, quindi

$$f(-1, 0) = f(1, 0) = 2$$

Paragonando i valori trovati, concludiamo

$$\max_Q f = 2 \qquad \min_Q f = -1$$

[1] Notiamo che $\lambda = 0$ nel punto critico perché $\nabla f(0, 1) = 0$, quindi non solo è perpendicolare a γ_2, ma è nullo. Se avessimo imposto $\lambda \neq 0$, avremmo dovuto inserire anche i punti critici di f su ∂Q.

Esercizio 2. (10 punti)
Sia S la superficie regolare

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2y = x^2 + z^2\}$$

a) (4 punti) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a S nel punto

$$P = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

e determinare se tale piano contiene la retta r di equazione parametrica

$$r : Q + t\boldsymbol{v} \qquad t \in \mathbb{R}$$

dove

$$Q = 2\boldsymbol{i} \qquad\qquad \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

La superficie S è luogo di zeri della funzione

$$F(x, y, z) = 2y - x^2 - z^2$$

il cui gradiente è

$$\nabla F(x, y, z) = -2x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$$

che nel punto P diventa

$$\nabla F(P) = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

Il vettore $\nabla F(P)$ è il generatore dello spazio ortogonale allo spazio tangente in P, quindi l'equazione cartesiana del pianto tangente a S in P è

$$2x - y + 2z = 4 \tag{1}$$

Per determinare se la retta r è contenuta nel piano, verifichiamo innanzitutto che Q appartenga il piano. Sostituendo le coordinate di Q nell'equazione cartesiana (1), troviamo $4 = 4$, quindi Q sta nel piano. Il secondo passo è determinare se il vettore $\mathbf{v}$ appartiene allo spazio tangente. Poiché

$$\mathbf{v} \cdot \nabla F(P) = 4 + 8 - 12 = 0$$

il vettore $\mathbf{v}$ è ortogonale a $\nabla F(P)$ e quindi appartiene allo spazio tangente a S in P. Ne segue che r è contenuta nel piano tangente a S in P.

b) (3 punti) calcolare l'area dell'insieme

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2y = x^2 + z^2 \ , \ y \leq 4\}$$

L'insieme N è dato dalla superficie S di sopra per $y \leq 4$. Se scriviamo S come superficie di rotazione, usando la parametrizzazione

$$h(t,\theta) := \sqrt{2t}\ \cos\theta\ \mathbf{i} + t\ \mathbf{j} + \sqrt{2t}\ \sin\theta\ \mathbf{k}$$

con $t \in [0,+\infty)$ e $\theta \in [0,2\pi)$ troviamo che

$$Area(N) = \int_0^{2\pi} \int_0^4 f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}\ dtd\theta$$

dove dobbiamo porre $f(t) = \sqrt{2t}$. Si trova allora

$$Area(N) = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{2t}\sqrt{1+\frac{1}{2t}}\ dtd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{1+2t}\ dtd\theta =$$

$$= 2\pi\ \left[\frac{1}{3}(1+2t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{52}{3}\ \pi$$

c) (3 punti) dire se l'insieme

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 2y = x^2+z^2\ ,\ y=4\right\}$$

definisce una varietà unidimensionale, e in caso affermativo calcolare la retta tangente a M nel punto

$$P = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

L'insieme M è l'intersezione di S con il luogo di zeri di $G(x,y,z) = y-4$. Per verificare se M è una varietà, calcoliamo

$$\nabla F \times \nabla G = 2z\mathbf{i} - 2x\mathbf{k}$$

Questo vettore si annulla per i punti della forma $(0,y,0)$ che non appartengono a M, quindi M è varietà.

La retta tangente a M in P (stesso punto di *a)*) è data dall'intersezione del piano (1) con il piano $\{y=4\}$, quindi è data dal sistema

$$\begin{cases} x+z=4 \\ y=4 \end{cases}$$

Esercizio 3. (9 punti)
Si consideri il seguente campo vettoriale

$$\boldsymbol{F} = \frac{2x}{(1+x^2)(1+z^2)}\ \boldsymbol{i} + \frac{1}{(1+z^2)}\ \boldsymbol{j} - \frac{2z[\log(1+x^2)+y]}{(1+z^2)^2}\ \boldsymbol{k}$$

a) (3 punti) determinare se è irrotazionale;

Il campo $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ come sopra è ben definito per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Per verificare che è irrotazionale verifichiamo che la 1-forma associata a $\mathbf{F}$ sia chiusa. A tale scopo bisogna verificare le uguaglianze

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

che diventano nel nostro caso

$$0 = 0$$

$$-\frac{4xz}{(1+x^2)(1+z^2)^2} = -\frac{4xz}{(1+x^2)(1+z^2)^2}$$

$$-\frac{2z}{(1+z^2)^2} = -\frac{2z}{(1+z^2)^2}$$

quindi $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

b) (3 punti) determinare se è conservativo e, in caso affermativo, esibire una funzione f che verifichi $\boldsymbol{F} = \nabla f$;

Sappiamo che si tratta di un campo conservativo perchè è irrotazionale su un insieme semplicemente connesso. Per trovare una $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che verifichi $\mathbf{F} = \nabla f$, dall'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{(1+z^2)}$$

ricaviamo

$$f(x, y, z) = \frac{y}{(1+z^2)} + g(x, z)$$

e sostituendo in

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{2z[\log(1+x^2)+y]}{(1+z^2)^2}$$

otteniamo

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, z) = -\frac{2z\log(1+x^2)}{(1+z^2)^2}$$

da cui

$$g(x, z) = \frac{\log(1+x^2)}{(1+z^2)} + h(x)$$

Abbiamo quindi

$$f(x, y, z) = \frac{y}{(1+z^2)} + \frac{\log(1+x^2)}{(1+z^2)} + h(x)$$

Sostituendo in
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{(1+x^2)(1+z^2)}$$
troviamo che possiamo scegliere $h(x) \equiv 0$. Quindi una soluzione di $\nabla f = \mathbf{F}$ è
$$f(x,y,z) = \frac{y}{(1+z^2)} + \frac{\log(1+x^2)}{(1+z^2)}$$

c) (3 punti) calcolare il lavoro svolto dal campo $\boldsymbol{F}$ per trasportare un punto massa dal punto $P = O$ al punto
$$Q = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

Poiché il campo è conservativo, il lavoro svolto lungo una curva dipende solo dal punto iniziale e finale. Se quindi γ è una qualsiasi curva da P a Q, troviamo
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}\; ds = f(Q) - f(P)$$
per ogni funzione f che verifica $\nabla f = \mathbf{F}$. Usando la f trovata nel punto *b)*, abbiamo
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}\; ds = \frac{1}{2}$$

Esercizio 4. (9 punti)
Calcolare
$$\int_{\varphi(K^+)} 2xy\; dy\wedge dz$$
dove $K^+ = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \;:\; \frac{u^2}{4} + v^2 \le 1\right\}$ *e*
$$\varphi(u,v) = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (\frac{u^2}{4} + v^2)\boldsymbol{k}$$

La matrice jacobiana $D\varphi(u,v)$ ha come colonne i vettori
$$\varphi_u(u,v) = \mathbf{i} + \frac{u}{2}\;\mathbf{k} \qquad\qquad \varphi_v(u,v) = \mathbf{j} + 2v\;\mathbf{k}$$
di cui calcoliamo il prodotto esterno
$$(\varphi_u\times\varphi_v)(u,v) = -\frac{u}{2}\;\mathbf{i} - 2v\;\mathbf{j} + \mathbf{k}$$
Questo ci permette di scrivere
$$dy\wedge dz = -\frac{u}{2}\; du\wedge dv$$

e quindi

$$\int_{\varphi(K^+)} 2xy\ dy \wedge dz = -\int_{K^+} u^2 v\ du \wedge dv$$

Poniamo $f(u,v) = u^2 v$. Notando che l'insieme K è simmetrico rispetto all'asse u e la funzione f è dispari nella variabile v, otteniamo

$$-\int_{K^+} u^2 v\ du \wedge dv = -\int\int_{K} u^2 v\ dudv = 0$$

Senza accorgerci di questa proprietà possiamo calcolare l'integrale usando il teorema di Stokes, da cui otteniamo

$$-\int_{K^+} u^2 v\ du \wedge dv = -\int_{\partial K^+} \frac{1}{3} u^3 v\ dv$$

Se parametrizziamo ∂K^+ tramite

$$h(\theta) = 2\cos\theta\ \mathbf{i} + \sin\theta\ \mathbf{j}$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$, otteniamo

$$-\int_{\partial K^+} \frac{1}{3} u^3 v\ dv = -\int_0^{2\pi} \frac{8}{3} \cos^4\theta\ \sin\theta\ d\theta =$$

$$= \frac{8}{15}\big(\cos^5\theta\big)_0^{2\pi} = 0$$