Matematica III
Corso di Ingegneria delle Telecomunicazioni
Prova scritta del 25-01-2007

Esercizio 1. (11 punti) *Sia* $K = \left\{(\vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 < \varphi \leq 2\pi\right\}$ *e* $\phi : K \to \mathbb{R}^3$ *definita da*

$$\phi(\vartheta, \varphi) = (2\cos\vartheta \ \cos\varphi)\boldsymbol{i} + (2\cos\vartheta \ \sin\varphi)\boldsymbol{j} + (2\sin\vartheta)\boldsymbol{k}$$

Verificare che l'insieme $S = \phi(K)$ *è una varietà. Trovare il punto* $P \in S$ *tale che il piano tangente a* S *nel punto* P *sia ortogonale alla retta*

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

(Suggerimento: i calcoli risultano più agevoli scrivendo S *come luogo di zeri di una funzione)*

Scriviamo l'insieme S come luogo di zeri di una funzione. Si verifica che S è la semi-sfera superiore di raggio 2, dunque è il luogo di zeri di

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

Per verificare che si tratta di una varietà, basta studiare il luogo degli zeri di $\nabla F(x, y, z)$. Si trova

$$\nabla F(x, y, z) = 2x \ \mathbf{i} + 2y \ \mathbf{j} + 2z \ \mathbf{k}$$

dunque $\nabla F(x, y, z) = 0$ se e solo se $x = y = z = 0$. Ma $(0, 0, 0) \notin S$, dunque S è una varietà.

Poniamo $P = a \ \mathbf{i} + b \ \mathbf{j} + c \ \mathbf{k}$. Il piano tangente $\pi_S(P)$ è ortogonale al vettore $\nabla F(P)$, quindi $\pi_S(P)$ è ortogonale alla retta γ se e solo se esiste una costante $k \in \mathbb{R}$ per cui

$$\nabla F(P) = k \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Si trova quindi che le componenti del punto P devono verificare il sistema

$$\begin{cases} 2a = 4k \\ 2b = 6k \\ 2c = 8k \end{cases}$$

Imponendo poi $P \in S$, si trova l'ulteriore condizione $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ e $c > 0$. Risolvendo il sistema e imponendo la condizione si trova

$$P = \frac{4}{\sqrt{29}} \ \mathbf{i} + \frac{6}{\sqrt{29}} \ \mathbf{j} + \frac{8}{\sqrt{29}} \ \mathbf{k}$$

Esercizio 2. (11 punti) *a) Dire se la funzione*

$$f(x,y) = (xe^x \cos y - ye^x \sin y) + i(xe^x \sin y + ye^x \cos y)$$

è olomorfa e calcolare $f(x,y) - ze^z$ $(z = x + iy)$*. Trovare una primitiva di* $f(x,y)$ *e calcolare*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz$$

dove Γ_1 *è il supporto della curva* $\gamma_1(t) = t^2 + it^3$ *con* $t \in [0,1]$.

Per verificare se una funzione è olomorfa usiamo le equazioni di Cauchy-Riemann, secondo le quali se $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, con u e v rispettivamente parte reale e immaginaria della funzione f, allora f è olomorfa se e solo se u e v sono differenziabili e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Per $f(x,y)$ troviamo

$$u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y \qquad v(x,y) = xe^x \sin y + ye^x \cos y$$

quindi sono funzioni differenziabili e

$$e^x(\cos y + x\cos y - y\sin y) = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y)$$

$$e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) = -e^x(\sin y + x\sin y + y\cos y)$$

quindi f è olomorfa.

Usando l'uguaglianza $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, si trova che $f(x,y) - ze^z = 0$, quindi abbiamo $f(z) = ze^z$.

Per trovare una primitiva di $f(z)$, possiamo ragionare come nel caso reale, e si trova che $F(z) = (z-1)e^z$ è una funzione olomorfa con derivata $F'(z) = e^z + (z-1)e^z = f(z)$.

Infine, la curva Γ_1 è una curva regolare non chiusa, con estremi in $P = \gamma_1(1) = 1 + i$ e $Q = \gamma_1(0) = 0$. Quindi per il teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni complesse troviamo

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz = F(P) - F(Q) = ie^{1+i} + 1 = (1 - e^1 \sin 1) + i(e^1 \cos 1)$$

b) Calcolare

$$\int_{\Gamma_2} \frac{z^3}{7i - 5z}\, dz$$

dove Γ_2 *è il supporto della curva* $\gamma_2(t) = t(1-t) + it(t^3 - 1)$ *con* $t \in [0,1]$.

La funzione $g(z) = \frac{z^3}{7i-5z}$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \left\{ i\frac{7}{5} \right\}$. La curva Γ_2 è una curva chiusa, come si verifica calcolando $\gamma_2(0) = \gamma_2(1) = 0$. Inoltre $t(t^3 - 1) < 0$ per ogni $t \in [0,1]$, quindi Γ_2 è nel semi-piano $\{\Im z \leq 0\}$. Se ne deduce che la funzione $g(z)$ è olomorfa all'interno della curva Γ_2, quindi per il teorema di Cauchy

$$\int_{\Gamma_2} \frac{z^3}{7i - 5z}\, dz = 0$$

Esercizio 3. (11 punti) *Un fungo spaziale è arrivato accidentalmente sulla Terra e inizia a riprodursi velocemente. Se $x(t)$ determina in metri quadrati la superficie della Terra invasa dal fungo, la legge di riproduzione del fungo implica che*

$$x'(t) = k(x-2)^2$$

per una costante $k > 0$. Poniamo $x_0 = x(0) > 0$, ossia x_0 è la superficie occupata dal fungo all'inizio della sua invasione.

a) A un tempo $t_0 > 0$ si ha $x(t_0) = 3$ e a un tempo $t_1 = t_0 + 10$ si ha $x(t_1) = 12$. Determinare la costante k.

L'equazione che determina la diffusione del fungo è a variabili separabili, quindi possiamo scrivere

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{1}{(y-2)^2}\, dy = \int_{t_0}^{t_1} k\, ds \tag{1}$$

da cui troviamo

$$-\frac{1}{x(t_1)-2} + \frac{1}{x(t_0)-2} = k(t_1 - t_0)$$

Sostituendo i dati si trova quindi $k = \frac{9}{100}$.

b) Se la superficie della Terra è di 10.002 metri quadrati, quanto tempo impiegherà il fungo a ricoprire la Terra se $x(0) = 3$?

Chiamiamo T il tempo in cui la Terra viene ricoperta. Utilizzando l'equazione in (1) con $t_0 = 0$, $x(t_0) = x(0) = 3$ e $x(T) = 10.002$ si trova

$$T = \frac{100}{9}\left(1 - \frac{1}{10.000}\right) = \frac{1.111}{100}$$

c) Cosa succede se invece il fungo occupa 2 metri quadrati al tempo $t_0 = 1$?

Osserviamo che la nostra equazione differenziale ha la proprietà di esistenza e unicità locale per le soluzioni. Poiché $\bar{x} = 2$ è soluzione stazionaria, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = k(x(t)-2)^2 \\ x(t_0) = 2 \end{cases}$$

ha come soluzione $x(t) \equiv 2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dunque in questo caso il fungo occupa una superficie costante.

d) Se invece all'inizio della sua invasione, il fungo occupa 1 metro quadrato, ossia $x_0 = 1$*, riuscirà a invadere tutta la Terra?*

Dal ragionamento del punto c), segue che per le soluzioni $x(t)$ della nostra equazione differenziale che hanno dato iniziale $x_0 < 2$, deve valere $x(t) < 2$ per ogni t nell'intervallo di esistenza della soluzione. Quindi, se $x_0 = 1$ il fungo ricoprirà una superficie sempre minore a 2, non invaderà quindi la Terra.