Matematica III
Corso di Ingegneria delle Telecomunicazioni
Prova scritta del 23-06-2007

Esercizio 1.

Chiamiamo vasca di altezza $h > 0$ e parametro $c > 0$ l'insieme

$$V_{c,h} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq h, \quad x^2 + y^2 \leq c^7 z^6\right\}$$

a) Per ogni $c > 0$ trovare $h(c)$ tale che $Vol(V_{c,h(c)}) = \frac{\pi}{7}$;

La vasca $V_{c,h}$ è un volume di rotazione, con sezioni orizzontali di raggio $r(z) = c^{\frac{7}{2}} z^3$. Il volume è quindi dato da

$$Vol(V_{c,h}) = \pi \int_0^h r(z)^2 \, dz = \pi \int_0^h c^7 z^6 \, dz = \frac{\pi c^7}{7} h^7$$

Imponendo $Vol(V_{c,h(c)}) = \frac{\pi}{7}$ si trova quindi $h(c) = \frac{1}{c}$.

b) Sia $c \mapsto F(c)$ la funzione

$$F : (0, \infty) \to \mathbb{R}^+ \quad F(c) = Area(\partial V_{c,h(c)})$$

Calcolare il limite di $F(c)$ per $c \to 0^+$ e per $c \to \infty$. Esiste una vasca di volume $\frac{\pi}{7}$ e di area di bordo minima?

Il bordo $\partial V_{c,h(c)}$ della vasca è dato dalla superficie laterale $S_l(V_{c,h(c)})$ della vasca e dalla superficie superiore $S_s(V_{c,h(c)})$.

La superficie laterale ha area data da

$$Area(S_l(V_{c,h(c)})) = 2\pi \int_0^{h(c)} r(z)\sqrt{1 + (r'(z))^2} \, dz = 2\pi \int_0^{\frac{1}{c}} c^{\frac{7}{2}} z^3 \sqrt{1 + 9c^7 z^4} \, dz =$$

$$= \frac{\pi}{27} \, \frac{(1 + 9c^3)^{\frac{3}{2}} - 1}{c^{\frac{7}{2}}}$$

La superficie superiore ha area data da

$$Area(S_l(V_{c,h(c)})) = \pi(r(h(c)))^2 = \pi c$$

quindi

$$F(c) = \pi c + \frac{\pi}{27} \, \frac{(1 + 9c^3)^{\frac{3}{2}} - 1}{c^{\frac{7}{2}}}$$

Ne segue che

$$\lim_{c \to 0^+} F(c) = \lim_{c \to \infty} F(c) = +\infty$$

Quindi la funzione $F(c)$ ha sicuramente un minimo assoluto in un punto $\bar{c} \in (0, \infty)$, e $V_{\bar{c},h(\bar{c})}$ è la vasca di volume $\frac{\pi}{7}$ e di area di bordo minima.

Esercizio 2.
Definiamo al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'insieme di funzioni

$$f_a(x, y) = x^2 - y^2 - y + 3 + ix + iaxy$$

a) Determinare $a_0 \in \mathbb{R}$ tale che f_{a_0} sia olomorfa.

Una funzione f_a è olomorfa se e solo se soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann. Cerchiamo quindi $a_0 \in \mathbb{R}$ che risolve

$$\frac{\partial}{\partial x} f_a(x, y) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} f_a(x, y) \quad \forall\, (x, y)$$

Deve essere

$$2x + i + iay = \frac{1}{i}\, (-2y - 1 + iax) \quad \forall\, (x, y)$$

Si trova quindi $a_0 = 2$.

b) Per tale a_0, calcolare

$$\int_\gamma f_{a_0}(z)\, dz$$

dove γ è l'arco di circonferenza che parte dal punto $P = -1$ e arriva al punto $Q = 1$, passando per il punto $R = \frac{7}{25} i$.

L'integrale di una funzione olomorfa non dipende dal cammino, ma solo dai punti iniziale e finale. Possiamo quindi calcolare l'integrale lungo il cammino più semplice da usare per il conto

$$\tilde{\gamma}(t) = (t, 0) \quad t \in [-1, 1]$$

Si trova allora

$$\int_{\tilde{\gamma}} f_2(z)\, dz = \int_{-1}^{1} (t^2 + 3 + it)\, dt = \left(\frac{t^3}{3} + 3t + \frac{it^2}{2} \right)_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + 6 = \frac{20}{3}$$

Analogamente, si poteva scrivere $f_2(z) = z^2 + iz + 3$, e usare la sua primitiva olomorfa $F(z) = \frac{z^3}{3} + \frac{iz^2}{2} + 3z$, per scrivere

$$\int_\gamma f_2(z)\, dz = F(Q) - F(P) = \frac{20}{3}$$

Esercizio 3.
a) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\sqrt{1+x^2(t)}}{x(t)} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

per $t \geq 0$.

Il problema non è ben definito per $x = 0$, e abbiamo $f(t,x) \geq 0$ per $x > 0$ e $f(t,x) < 0$ per $x < 0$. La funzione $f(t,x)$ è inoltre lipschitziana su ogni intervallo di x lontano da $x = 0$. Quindi, poiché $x(0) = 1 > 0$ e $f(t,x) > 0$ per $x > 0$, risulta $x(t) \geq 1 > 0$ per ogni $t \geq 0$, e la soluzione sarà unica e ben definita su $(0, \infty)$.

Per trovare esplicitamente la soluzione, notiamo che il problema è a variabili separabili, quindi scriviamo

$$\int_1^{x(t)} \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\, d\xi = \int_0^t \, dt$$

da cui si ottiene

$$\sqrt{1+x^2(t)} - \sqrt{2} = t \quad \Rightarrow \quad x(t) = \sqrt{(t+\sqrt{2})^2 - 1}$$

dove la scelta del segno di $x(t)$ dipende dai ragionamenti iniziali.

b) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = (1 + \cos^2 x(t))\ \frac{\sqrt{1+x^2(t)}}{x(t)} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

dire se $x(\sqrt{2}) \geq \frac{5}{2}$.

Possiamo ripetere per questo problema le considerazioni di esistenza, unicità, segno ed esistenza della soluzione del punto precedente.

Inoltre, se chiamiamo $\bar{x}(t)$ la soluzione del problema del punto a), possiamo scrivere

$$x(t) - x(0) = \int_0^t x'(s)\, ds \geq \int_0^t \frac{\sqrt{1+x^2(s)}}{x(s)}\, ds = \bar{x}(t) - \bar{x}(0) \quad \forall\, t \geq 0$$

essendo $(1 + \cos^2 \xi) \geq 1$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}$. Quindi, essendo $x(0) = \bar{x}(0)$, si trova

$$x(\sqrt{2}) \geq \bar{x}(\sqrt{2}) = \sqrt{7} \geq \frac{5}{2}$$