Matematica III
Corso di Ingegneria delle Telecomunicazioni
Prova scritta del 15-09-2007

Esercizio 1. (10 punti)
Sia $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ , \ x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\right\}$..
a) Utilizzare il teorema di Stokes (o Poincaré-Cartan) per calcolare

$$\int_K y \ dx \wedge dy$$

Poniamo $\omega = y \ dx \wedge dy$. La 2-forma ω è chiusa e definita su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi è esatta. Una sua primitiva è $\nu = xy \ dy$ (oppure $\nu = -\frac{1}{2} y^2 \ dx$). Il teorema di Stokes ci dice che

$$\int_K \omega = \int_{\partial^+ K} \nu$$

Per concludere bisogna quindi parametrizzare il bordo di K. Possiamo scrivere

$$\partial^+ K = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

dove: Γ_1 è il supporto della curva $t \mapsto \gamma_1(t) = (t, 1 - t^2)$ con $t \in [-1, 1]$; Γ_2 è il supporto della curva $t \mapsto \gamma_2(t) = (t, t^2 - 1)$ con $t \in [-1, 1]$. Notiamo che Γ_1 così scritta è orientata in senso orario, quindi l'integrale su di lei dovrà essere preso con il segno meno.

In conclusione otteniamo

$$\int_{\partial^+ K} \nu = -\int_{-1}^{1} t(1 - t^2)(-2t)dt + \int_{-1}^{1} t(t^2 - 1)(2t)dt = 0$$

b) Utilizzare il teorema di Stokes (o Poincaré-Cartan) per calcolare l'area di K;

Usiamo la formula

$$Area(K) := \int_K dx \wedge dy$$

Quindi, se $\omega = dx \wedge dy$, troviamo come sua primitiva $\nu = x \ dy$. Applichiamo di nuovo il teorema di Stokes come sopra e abbiamo

$$Area(K) = \int_{\partial^+ K} xdy = -\int_{-1}^{1} t(-2t)dt + \int_{-1}^{1} t(2t)dt = \int_{-1}^{1} 4t^2 dt = \frac{8}{3}$$

c) Calcolare

$$\int_{\partial^+ K} \frac{y \ dx - x \ dy}{x^2 + y^2}$$

In questo caso, $\omega = \frac{y \ dx - x \ dy}{x^2 + y^2}$ è una 1-forma definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e chiusa, essendo $d\omega = 0$. Non possiamo però applicare il teorema di Stokes perché $(0, 0) \in K$. Ma essendo $(0, 0)$ l'unica singolarità di ω, ed essendo ω chiusa, vale

$$\int_{\partial^+ K} \omega = \int_\gamma \omega$$

per ogni curva chiusa γ che sia omologa a $\partial^+ K$ rispetto all'origine. In particolare, come visto a lezione, possiamo scegliere $\gamma = \partial^+ B(0,1)$ e otteniamo

$$\int_{\partial^+ K} \omega = \int_{\partial^+ B(0,1)} \omega = -2\pi$$

Esercizio 2. (11 punti)
a) Dire se le seguenti funzioni sono olomorfe:

$$f_1(x,y) = e^{x^2-y^2}\ (\cos(2xy) + \boldsymbol{i}\sin(2xy))$$

$$f_2(x,y) = e^{x^2+y^2}\ (\cos(2xy) + \boldsymbol{i}\sin(2xy))$$

$$f_3(x,y) = e^{x^2+y^2}\ (x + 2\boldsymbol{i}y)$$

$$f_4(x,y) = \frac{1}{x(x-2) - y^2 + \boldsymbol{i}(xy + (x-2)y)}$$

Si tratta di verificare che è soddisfatta la condizione $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\mathbf{i}}\frac{\partial f}{\partial y}$. Facendo il calcolo nei vari casi troviamo:

$$(n=1)\quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y^2}\ [2x\ \cos(2xy) - 2y\ \sin(2xy) + \mathbf{i}(2x\ \sin(2xy) + 2y\ \cos(2xy))] = \frac{1}{\mathbf{i}}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(n=2)\quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+y^2}\ [2x\ \cos(2xy) - 2y\ \sin(2xy) + \mathbf{i}(2x\ \sin(2xy) + 2y\ \cos(2xy))] \neq \frac{1}{\mathbf{i}}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(n=3)\quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+y^2}\ (2x^2 + 1 + 4\mathbf{i}xy) \neq \frac{1}{\mathbf{i}}\ e^{x^2+y^2}\ (2xy + \mathbf{i}(4y^2+2)) = \frac{1}{\mathbf{i}}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(n=4)\quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x - 2 + 2\mathbf{i}y}{[x(x-2) - y^2 + \mathbf{i}(xy + (x-2)y)]^2} = \frac{1}{\mathbf{i}}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Quindi f_1 è olomorfa, f_2 e f_3 non lo sono, mentre f_4 verifica le condizioni di Cauchy-Riemann dove è ben definita. Notiamo che $f_1(z) = e^{z^2}$ e $f_4(z) = \frac{1}{z(z-2)}$, quindi f_4 è meromorfa con poli di ordine 1 in $z = 0$ e $z = 2$.

b) Calcolare per $n = 1, 3$ e 4

$$\int_{\partial^+ B(0,1)} f_n(z) dz$$

Applichiamo prima il teorema di Cauchy e il teorema dei residui nei casi $n = 1$ e $n = 4$. Si trova

$$\int_{\partial^+ B(0,1)} f_1(z)\, dz = 0$$

$$\int_{\partial^+ B(0,1)} f_4(z)\, dz = 2\pi\mathbf{i}\,\mathrm{Res}(f_4, 0) = -\pi\mathbf{i}$$

Nel caso $n = 3$ dobbiamo fare il conto esplicito. Usando la parametrizzazione $z(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, che scritta per $z = x + iy$ diventa $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, troviamo

$$\int_{\partial^+ B(0,1)} f_3(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \mathbf{i}e\,(\cos t + 2\mathbf{i}\ \sin t)\,(\cos t + \mathbf{i}\sin t)\, dt = -\mathbf{i}e\pi$$

Esercizio 3. (12 punti)

Un masso viene lasciato cadere da fermo in una piscina, profonda 4 metri, da un'altezza di 20 metri. Prima di raggiungere l'acqua, il masso si muove con legge oraria $x(t)$ che soddisfa $\ddot{x}(t) = -g$, in cui si trascura l'attrito. Dentro l'acqua l'accelerazione gravitazionale viene smorzata dalla legge di Archimede, per cui si suppone che il masso subisca un'accelerazione costante rivolta verso il basso di valore totale $= -g + a$. Inoltre nell'acqua è presente una forza di attrito con costante γ. Si ponga $g = 10\, m/s^2$, $a = 5\, m/s^2$ e $\gamma = 1\, s^{-1}$

a) Dire dopo quanti secondi il masso raggiunge l'acqua.

Poniamo l'origine dell'asse x nel punto di separazione tra aria e acqua, e il verso positivo dell'asse è verso l'alto, essendo data da $-g$ l'accelerazione gravitazionale.

Dobbiamo trovare l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -g \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 20 \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 = 0$, quindi ha unica soluzione $\lambda = 0$ con molteplicità 2. Inoltre la soluzione particolare $\bar{x}(t)$ è un polinomio di grado al massimo 2, e si trova $\bar{x}(t) = -\frac{1}{2}gt^2$.

Ne segue che la soluzione è della forma $x(t) = c_1 + c_2 t - \frac{1}{2}gt^2$ con costanti c_1 e c_2 da determinare usando le condizioni iniziali. Si trova $c_1 = 20$ e $c_2 = 0$. La soluzione è quindi $x(t) = 20 - \frac{1}{2}gt^2$.

L'istante t_1 in cui il masso raggiunge l'acqua si trova ponendo $x(t_1) = 0$. Quindi

$$t_1 = \sqrt{\frac{40}{g}} = 2$$

b) Scrivere la legge oraria che il masso segue dentro l'acqua.

Le forze in gioco sono l'accelerazione costante di valore totale $= -g + a$ e la forza di attrito che è per definizione $-\gamma \dot{x}(t)$, essendo proporzionale alla velocità del corpo e opposta ad essa. Quindi il masso segue la legge oraria che si ottiene risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -g + a - \gamma \dot{x}(t) \\ \dot{x}(2) = -20 \\ x(2) = 0 \end{cases}$$

dove le condizioni iniziali sono quelle che si ottengono dal punto a).

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \gamma\lambda = 0$, quindi ha due soluzioni $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\gamma$ con molteplicità 1. Inoltre la soluzione particolare $\bar{x}(t)$ è un polinomio di grado al massimo 2, e si trova $\bar{x}(t) = (-g + a)t$.

Sostituendo i valori numerici, si trova che la soluzione è della forma $x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} - 5t$ con costanti c_1 e c_2 da determinare usando le condizioni iniziali. Si trova $c_1 = -5$ e $c_2 = 15\, e^2$. La legge oraria che il masso segue dentro l'acqua è quindi

$$x(t) = -5 + 15\, e^{2-t} - 5t \qquad t \geq 2$$

c) Dire se dopo 3 secondi il masso ha raggiunto il fondo della piscina.

Per $t = 3$ dobbiamo usare la legge oraria del punto b), e ci dobbiamo chiedere se $x(3) < -4$. Sostituendo troviamo

$$x(3) = 15\, e^{-1} - 20 < \frac{15}{2} - 20 = -\frac{25}{2} < -4$$