Matematica III
Corso di Ingegneria delle Telecomunicazioni
Prova scritta del 14-07-2007

Esercizio 1. (12 punti) *Sia K l'insieme*

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 - 1 \le y \le \sqrt{1 - x^4} \right\}$$

Calcolare

$$\int_{\partial^+ K} \omega$$

dove ω è una 1-forma data da:

a) $\omega = \frac{2\,dx}{x+2} - \frac{dy}{5+y}$

In questo caso, ω è una 1-forma definita su $\mathbb{R}^2 \setminus (\{x = -2\} \cup \{y = -5\})$ e chiusa, essendo $d\omega = 0$. Dato K, risulta che ω è definita su K, quindi possiamo applicare il Teorema di Stokes ottenendo

$$\int_{\partial^+ K} \omega = \int_K d\omega = 0$$

b) $\omega = f(x)\,dx + f(y)\,dy$, *per una funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1;

In questo caso, ω è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è chiusa, infatti vale

$$d\omega = \left(\frac{\partial(f(y))}{\partial x} - \frac{\partial(f(x))}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0$$

Quindi si conclude come nel caso precedente.

c) $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$

In questo caso, ω è una 1-forma definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e chiusa, essendo $d\omega = 0$. Non possiamo però applicare il teorema di Stokes perché $(0,0) \in K$. Ma essendo $(0,0)$ l'unica singolarità di ω, ed essendo ω chiusa, vale

$$\int_{\partial^+ K} \omega = \int_\gamma \omega$$

per ogni curva chiusa γ che sia omologa a $\partial^+ K$ rispetto all'origine. In particolare, come visto a lezione, possiamo scegliere $\gamma = \partial^+ B(0,1)$ e otteniamo

$$\int_{\partial^+ K} \omega = \int_{\partial^+ B(0,1)} \omega = 2\pi$$

Il risultato si può ottenere usando anche il teorema dei residui della teoria delle funzioni di variabile complessa. Infatti scrivendo $dz = dx + idy$, si ottiene che

$$\int_{\partial^+ K} \omega = \text{Im} \left(\int_{\partial^+ K} \frac{1}{z}\, dz \right) = \text{Im}\ (2\pi i)$$

dove l'ultima uguaglianza è data dal teorema dei residui.

Esercizio 2. (12 punti) *Si denoti con $x(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \ddot{x} + 3\dot{x} = \left(2x - \frac{t}{2}\right) sgn(x) + \frac{t}{2} \\ x(0) = -\frac{3}{4} \\ \dot{x}(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

dove $sgn(x) = 1$ se $x > 0$, $sgn(0) = 0$ e $sgn(x) = -1$ se $x < 0$.

a) Discutere esistenza e unicità per la soluzione $x(t)$. Per quali $t \in \mathbb{R}$ è definita?

Possiamo scrivere il problema di Cauchy dato come il sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -3v + \left(2u - \frac{t}{2}\right) \text{sgn}(u) + \frac{t}{2} \\ u(0) = -\frac{3}{4} \\ v(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lo studio dell'esistenza e unicità si svolge quindi studiando la funzione

$$F(t, u, v) = \begin{pmatrix} v \\ -3v + \left(2u - \frac{t}{2}\right) \text{sgn}(u) + \frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

Si vede che la funzione è continua su $\mathbb{R}^3 \setminus \{u = 0, t \neq 0\}$, ed è localmente lipschitziana in (u, v) nello stesso insieme. Otteniamo quindi esistenza e unicità locale in $\mathbb{R}^3 \setminus \{u = 0, t \neq 0\}$. D'altra parte è possibile continuare la soluzione attraverso l'insieme $\{u = 0, t \neq 0\}$ imponendo l'uguaglianza dei dati iniziali.

Per quanto riguarda l'intervallo massimale di esistenza in $t \in \mathbb{R}$, osserviamo che il comportamento di $F(t, u, v)$ è lineare in (u, v), quindi la soluzione non esplode in tempo finito. Dunque la soluzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

b) Esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $x(t_0) = 0$?

Per il nostro problema di Cauchy vale $x(0) < 0$, quindi cerchiamo la soluzione nel caso $\operatorname{sgn}(x) = -1$. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

e una soluzione particolare sarà della forma $\bar{x}(t) = At + B$. Risolvendo l'equazione caratteristica e cercando A, B troviamo che lo spazio vettoriale delle soluzioni è della forma

$$\left\{ x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \ : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Usando le condizioni iniziali troviamo che la soluzione che cerchiamo è

$$x(t) = \frac{1}{2}\,t - \frac{3}{4} \qquad \text{per i } t \text{ per cui } \ x(t) < 0$$

In particolare si trova che $x(t) < 0$ per ogni $t \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ e $t_0 = \frac{3}{2}$. Essendo $x'(t_0) = \frac{1}{2}$, appena dopo t_0 la soluzione $x(t)$ sarà positiva.

c) Tracciare un grafico della soluzione $x(t)$.
d) Calcolare $x(2)$.

Possiamo calcolare esplicitamente la soluzione, e quindi $x(2)$, imponendo che la nostra soluzione soddisfi, per $t > t_0$ e finché $x(t) > 0$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + 3\dot{x} - 2x = 0 \\ x(t_0) = 0 \\ \dot{x}(t_0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} < 0 \qquad \lambda_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} > 0$$

Lo spazio vettoriale delle soluzioni è della forma

$$\left\{ x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \ : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Usando le condizioni iniziali troviamo

$$c_1 = -\frac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_1}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} < 0 \qquad c_2 = \frac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_2}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} > 0$$

quindi la soluzione tende a $+\infty$ in maniera esponenziale con coefficiente λ_2. Ne segue che questa è soluzione per $t \in (t_0, +\infty)$ e possiamo quindi calcolare

$$x(2) = c_1 e^{2\lambda_1} + c_2 e^{2\lambda_2}$$

con λ_1, λ_2 e c_1, c_2 come sopra.

Esercizio 3. (12 punti) *Si vuole costruire una tenda di stoffa di forma conica, con altezza $h \le 5\,m$, base di raggio $R \le 10\,m$ e volume $V \ge \frac{\pi}{3}\,m^3$. Trovare h e R in modo da consumare meno stoffa possibile.*
(Sugg: esprimere superficie laterale e volume della tenda in funzione di h e R.)

Scriviamo innanzitutto la formula per il volume $V(h, R)$ e la superficie laterale $S(h, R)$ del cilindro. Notiamo che il cilindro si può considerare come un volume di rotazione, ottenuto ruotando in $\mathbb{R}^3$ la curva

$$y = f(z) = \frac{(h - z)\,R}{h} \qquad z \in [0, h]$$

intorno all'asse z. Usando quindi le formule per le superfici di rotazione si trova

$$V(h, R) = \pi \int_0^h f^2(z)\,dz = \frac{\pi h R^2}{3}$$

$$S(h, R) = 2\pi \int_0^h f(z)\,\sqrt{1 + (f'(z))^2}\,dz = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$$

Se adesso indichiamo con K l'insieme dello spazio $(h, R) \in \mathbb{R}^2$ dato da

$$K = \left\{ (h, R) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le R \le 10,\ 0 \le h \le 5,\ V(h, R) \ge \frac{\pi}{3} \right\}$$

si tratta di trovare il minimo su K di $S(h, R)$.

Calcolando $\nabla S(h, R)$, si trova che non ci sono punti stazionari interni. Quindi consideriamo il comportamento di S sul bordo di K. L'unico punto stazionario per S ristretta al bordo di K si ha nel tratto di bordo $\{hR^2 = 1\}$ e si ottiene risolvendo

$$\frac{d}{dR} S\left(\frac{1}{R^2}, R\right) = \frac{d}{dR}\left(\pi R \sqrt{R^2 + \frac{1}{R^4}}\right) = 0$$

Il punto critico è dato da $\bar{R} = 2^{-\frac{1}{6}}$, da cui si trova $\bar{h} = 2^{\frac{1}{3}}$. Paragonando $S(\bar{h}, \bar{R})$ con i valori di S sugli estremi del bordo di K si trova che $(\bar{h}, \bar{R})$ è il punto di minimo che cercavamo.