Matematica III
Corso di Ingegneria delle Telecomunicazioni
Prova scritta del 08-01-2007

Esercizio 1. (12 punti) *Sia S_1 la superficie in $\mathbb{R}^3$ data da*

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2(z + 1) = x^2 + y^2\right\}$$

a) (3 punti) determinare l'equazione cartesiana del piano tangente a S_1 nel punto $P = \sqrt{2}\boldsymbol{i}$;

Parametrizziamo la superficie S_1 tramite

$$\varphi : (t, \theta) \in K \subset \mathbb{R}^2 \to (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

dove $K = \{(t, \theta) \ : \ t \geq -1 \ , \ \theta \in [0, 2\pi]\}$, ponendo

$$x(t, \theta) = \sqrt{2(t + 1)} \ \cos\theta$$

$$y(t, \theta) = \sqrt{2(t + 1)} \ \sin\theta$$

$$z(t, \theta) = t$$

Troviamo quindi che le colonne della matrice jacobiana $D\varphi(t, \theta)$ sono

$$\varphi_t(t, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2(t+1)}} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2(t+1)}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi_\theta(t, \theta) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2(t + 1)} \ \sin\theta \\ \sqrt{2(t + 1)} \ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

e il vettore normale alla superficie è

$$\varphi_t \times \varphi_\theta(t, \theta) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2(t + 1)} \ \cos\theta \\ -\sqrt{2(t + 1)} \ \sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $P = \varphi(0, 0)$, l'equazione cartesiana del piano tangente a S_1 in P è data da

$$(\varphi_t \times \varphi_\theta(0, 0)) \cdot (x - \sqrt{2}, y, z) = 0$$

che diventa

$$\sqrt{2} \ x - z = 2$$

Un metodo alternativo è vedere S_1 come luogo di zeri della funzione

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2(z + 1)$$

il cui gradiente è

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

che nel punto P diventa

$$\nabla F(P) = 2\sqrt{2}\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$$

Il vettore $\nabla F(P)$ è il generatore dello spazio ortogonale allo spazio tangente in P, quindi l'equazione cartesiana del pianto tangente a S_1 in P è

$$\nabla F(P) \cdot (x - \sqrt{2}, y, z) = 0$$

e si ritrova l'equazione di prima.

b) (3 punti) calcolare l'integrale

$$\int_{S_1 \cap \{z \leq 0\}} x \; dy \wedge dz + y \; dz \wedge dx$$

Usando la parametrizzazione del punto a), possiamo scrivere

$$\int_{S_1 \cap \{z \leq 0\}} x \; dy \wedge dz + y \; dz \wedge dx = \int_{\varphi(K \cap \{t \leq 0\})} x \; dy \wedge dz + y \; dz \wedge dx$$

Inoltre, usando il vettore normale $\varphi_t \times \varphi_\theta$ o sostituendo la parametrizzazione, troviamo

$$dy \wedge dz = -\sqrt{2(t+1)} \; \cos\theta \; dt \wedge d\theta$$
$$dz \wedge dx = -\sqrt{2(t+1)} \; \sin\theta \; dt \wedge d\theta$$

quindi, sostituendo le due relazioni sopra, e scrivendo $x(t, \theta)$ e $y(t, \theta)$ al posto di x e y, l'integrale diventa

$$\int_{K \cap \{t \leq 0\}} \big(-2(t+1) \; \cos^2\theta - 2(t+1) \; \sin^2\theta\big) \, dt \wedge d\theta =$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} \; d\theta \; \int_{-1}^{0} \; (t+1) \; dt = -2\pi$$

Sia poi S_2 la superficie data da

$$S_2 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 = 4 \; , \; z \geq 0\big\}$$

c) (6 punti) calcolare i seguenti integrali

$$\int_{S_1 \cap S_2} \frac{y}{x^2 + y^2} \; dx - \frac{x}{x^2 + y^2} \; dy + z \; dz$$

$$\int_{S_1 \cap S_2} x \ dx + \frac{z}{y^2+z^2} \ dy - \frac{y}{y^2+z^2} \ dz$$

L'intersezione $S_1 \cap S_2$ è la circonferenza data da

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ (x,y,z) \ : \ x^2+y^2 = 2\sqrt{3} \ , z = \sqrt{3}-1 \right\}$$

che possiamo parametrizzare tramite

$$\varphi : \theta \in [0, 2\pi] \to \left(\sqrt{(2\sqrt{3})} \cos\theta, \sqrt{(2\sqrt{3})} \sin\theta, \sqrt{3}-1 \right)$$

Studiamo ora le forme differenziali da integrare. La prima è

$$\omega_1 = \frac{y}{x^2+y^2} \ dx - \frac{x}{x^2+y^2} \ dy + z \ dz$$

Si tratta di una 1-forma non definita lungo la retta $x = y = 0$, chiusa ma non globalmente esatta. Poiché la curva $S_1 \cap S_2$ può essere vista come bordo di una superficie che interseca la retta $x = y = 0$, non possiamo applicare il teorema di Stokes. Per calcolare il valore dell'integrale dobbiamo quindi usare la parametrizzazione $\varphi(\theta)$ e scrivere l'integrale come

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}\sin\theta}{2\sqrt{3}} \ (-\sqrt{2\sqrt{3}}\sin\theta) - \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}\cos\theta}{2\sqrt{3}} \ (\sqrt{2\sqrt{3}}\cos\theta) \right) d\theta = -2\pi$$

La seconda forma differenziale è

$$\omega_2 = x \ dx + \frac{z}{y^2+z^2} \ dy - \frac{y}{y^2+z^2} \ dz$$

Si tratta di una 1-forma non definita lungo la retta $y = z = 0$, chiusa ma non globalmente esatta. Poiché la curva $S_1 \cap S_2$ può essere vista come bordo di una superficie che non interseca la retta $y = z = 0$, siamo in una zona in cui possiamo applicare il teorema di Stokes, quindi, se S è la superficie il cui bordo è $S_1 \cap S_2$ abbiamo

$$\int_{S_1 \cap S_2} \omega_2 = \int_S d\omega_2 = 0$$

Si poteva anche osservare che su un insieme semplicemente connesso che non interseca la retta $y = z = 0$, la 1-forma ω_2 è esatta, quindi il suo integrale è nullo perché integrale lungo una curva chiusa di una 1-forma esatta.

Esercizio 2. (6 punti) *Dire quali tra le seguenti funzioni sono olomorfe, specificando e classificando eventuali singolarità:*

$$f_1(x,y) = \left(x^2 - y^2 - x + 1\right) + i\,(2xy - 3y)$$

$$f_2(x,y) = \left(x^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + 4x - 1\right) + i\left(3x^2y - y^3 - 6xy + 4y\right)$$

$$f_3(x,y) = \tfrac{e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y)}{(x+iy)(x+iy-1)^2(x+iy-3)}$$

Per le funzioni olomorfe calcolare

$$\int_{\partial^+ B(0,2)} f(z)\ dz$$

Per verificare se una funzione è olomorfa usiamo le equazioni di Cauchy-Riemann, secondo le quali se $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, con u e v rispettivamente parte reale e immaginaria della funzione f, allora f è olomorfa se e solo se u e v sono differenziabili e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Per $f_1(x,y)$ troviamo

$$u_1(x,y) = x^2 - y^2 - x + 1 \qquad v_1(x,y) = 2xy - 3y$$

quindi sono funzioni differenziabili ma

$$2x - 1 \neq 2x - 3 \qquad -2y = -2y$$

quindi f_1 non è olomorfa.

Per $f_2(x,y)$ troviamo

$$u_2(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + 4x - 1 \qquad v_1(x,y) = 3x^2y - y^3 - 6xy + 4y$$

quindi sono funzioni differenziabili e

$$3x^2 - 3y^2 - 6x + 4 = 3x^2 - 3y^2 - 6x + 4 \qquad -6xy + 6y = -6xy + 6y$$

quindi f_2 è olomorfa e non ha singolarità.

Per $f_3(x,y)$ si può invece scrivere semplicemente

$$f_3(z) = \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2(z-3)}$$

e quindi è olomorfa perché composizione di funzioni olomorfe, a meno dei poli: due di ordine 1 in $z_0 = 0$ e $z_0 = 3$; uno di ordine 2 in $z_0 = 1$.

Calcoliamo allora l'integrale per f_2 e per f_3. Applicando il teorema di Cauchy a f_2 troviamo

$$\int_{\partial^+ B(0,2)} f_2(z)\ dz = 0$$

mentre il teorema dei residui ci dice che

$$\int_{\partial^+ B(0,2)} f_3(z)\ dz = 2\pi i\ \left(Res(f_3,0) + Res(f_3,1)\right)$$

Dalla teoria dei residui troviamo

$$Res(f_3, 0) = \left.\frac{e^{2z}}{(z-1)^2(z-3)}\right|_{z=0} = -\frac{1}{3}$$

$$Res(f_3, 1) = D\left(\frac{e^{2z}}{z(z-3)}\right)\Bigg|_{z=1} = -\frac{3}{4}\ e^2$$

Quindi

$$\int_{\partial^+ B(0,2)} f_3(z)\ dz = -2\pi i\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\ e^2\right)$$

Esercizio 3. (10 punti)

a) (5 punti) Determinare esplicitamente le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = t^2(x-1)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$, studiando gli intervalli di esistenza delle soluzioni.

Si verifica che la funzione $f(t, x) = t^2(x-1)^2$ è continua e localmente lipschitziana per ogni $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, infatti $\frac{\partial f}{\partial x} = 2t^2(x-1)$ che è limitata almeno in un intorno di ogni $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Quindi le soluzioni esistono e sono localmente uniche.

I punti stazionari sono soluzioni dell'equazione $f(t, x) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. L'unico punto stazionario è quindi $x = 1$. Dunque se $x_0 = 1$, la soluzione del problema di Cauchy è $x(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per l'unicità locale delle soluzioni, nessun'altra soluzione può assumere il valore $x = 1$, quindi dividiamo il problema in due casi.

Sia $x_0 > 1$. Il problema è a variabili separabili, quindi scriviamo

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{(y-1)^2}\ dy = \int_0^t s^2\ ds$$

da cui otteniamo

$$x(t) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x_0-1} - \frac{1}{3}t^3} \tag{1}$$

che esplode in $\bar{t} = \sqrt[3]{\frac{3}{x_0-1}} > 0$, quindi l'intervallo di esistenza della soluzione è $(-\infty, \bar{t})$.

Se invece $x_0 < 1$, la soluzione si scrive ancora come in (1), ma $\bar{t} = \sqrt[3]{\frac{3}{x_0-1}} < 0$, quindi l'intervallo di esistenza della soluzione è $(\bar{t}, +\infty)$.

b) (5 punti) Sia $f(t, x)$ la funzione

$$f(t, x) = \begin{cases} t^2(x-1)^2 & se\ |x-1| < 1 \\ t^2 & se\ |x-1| \geq 1 \end{cases}$$

studiare esistenza e unicità locale delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

e studiare il comportamento delle soluzioni al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

La funzione $f_2(t,x) = t^2$ è continua e globalmente lipschitziana in x. La funzione $f_1(t,x) = t^2(x-1)^2$ abbiamo visto sopra essere continua e localmente lipschitziana in x. Quindi abbiamo esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy lontano dai punti per cui $|x-1| = 1$. Ma se scegliamo x_1 e x_2 diversi e tali che $|x_1 - 1| < 1$ e $|x_2 - 1| \geq 1$, troviamo

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = t^2 \left(1 - (x_1-1)^2\right) \leq t^2 \left((x_2-1)^2 - (x_1-1)^2\right)$$

e usiamo il modulo di lipschitzianità di f_1.

La soluzione $x(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ è ancora soluzione del problema di Cauchy. Quindi $x_0 = 1$ genera una soluzione definita per ogni t.

Se $1 < x_0 < 2$, la soluzione è (1) finché $x(t) < 2$. Poiché (1) esplode, esiste $t_1 > 0$ per cui $x(t_1) = 2$ e da quel punto in poi si ha $x'(t) = t^2$. Quindi da quel punto in poi la soluzione sarà $x(t) = 2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t_1^3$, che è definita per ogni $t > t_1$ e resta sopra la retta $x = 2$. Per $t < 0$, invece la soluzione è sempre (1).

Per $x_0 \geq 2$, la soluzione è data da $x(t) = x_0 + \frac{1}{3}t^3$ per $t > 0$. Per $t < 0$, esiste $t_1 < 0$ tale che $x(t_1) = 2$, e per ogni $t < t_1$ la soluzione è quella del problema di Cauchy del punto a). Quindi anche per ogni $x_0 \geq 2$ le soluzioni sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Nel caso $x_0 < 1$ si ragiona esattamente allo stesso modo.

Esercizio 4. (6 punti)
Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt{n}\ \log\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)$$

studiare la convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

La serie converge totalmente su $\mathbb{R}$? E su intervalli $I \subset \mathbb{R}$ limitati?

Le funzioni $f_n(x)$ sono definite e a valori positivi per ogni $x \in \mathbb{R}$. Fissato un qualsiasi $x \in \mathbb{R}$, applicando limiti notevoli abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\sqrt{n}\ \frac{x^2}{n^2}} = 1$$

quindi dal criterio del confronto asintotico troviamo che la serie di funzioni data converge in x se e solo se converge la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, \frac{x^2}{n^2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Quest'ultima è una serie armonica di ragione $\frac{3}{2}$, quindi converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che anche $\sum_n f_n(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Studiamo la convergenza totale su $\mathbb{R}$. Per definizione, dobbiamo studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)|$$

Ma le funzioni $f_n(x)$ sono non limitate su $\mathbb{R}$, come si verifica per esempio considerando il limite per $x \to \pm\infty$. Quindi $\sup\limits_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = \infty$ per ogni $n \geq 1$. Non possiamo quindi avere convergenza totale su $\mathbb{R}$.

Se però ci restringiamo a un insieme $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ limitato, si trova

$$\sup_{I} |f_n(x)| = \max \{f_n(a), f_n(b)\} \qquad \forall\, n \geq 1$$

quindi la convergenza totale su I segue dalla convergenza puntuale sugli estremi di I.