Matematica III
Corso di Ingegneria delle Telecomunicazioni
Prova scritta del 04-06-2007

Esercizio 1. (8 punti) *Si consideri il seguente campo vettoriale*

$$\boldsymbol{F} = \frac{e^x}{1+y^2+z^2}\ \boldsymbol{i} - \frac{2e^x y}{(1+y^2+z^2)^2}\ \boldsymbol{j} - \frac{2e^x z}{(1+y^2+z^2)^2}\ \boldsymbol{k}$$

a) (5 punti) determinare se è irrotazionale e conservativo e, in caso affermativo, esibire una funzione f che verifichi $\boldsymbol{F} = \nabla f$;

Il campo $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ come sopra è ben definito per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Per verificare che è irrotazionale verifichiamo che la 1-forma associata a $\mathbf{F}$ sia chiusa. A tale scopo bisogna verificare le uguaglianze

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

che diventano nel nostro caso

$$-\frac{2e^x y}{(1+y^2+z^2)^2} = -\frac{2e^x y}{(1+y^2+z^2)^2}$$

$$-\frac{2e^x z}{(1+y^2+z^2)^2} = -\frac{2e^x z}{(1+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{8e^x yz}{(1+y^2+z^2)^3} = \frac{8e^x yz}{(1+y^2+z^2)^3}$$

quindi $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Poiché si tratta di un campo irrotazionale su $\mathbb{R}^3$ che è un insieme semplicemente connesso, allora è anche conservativo.

Per trovare una $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che verifichi $\mathbf{F} = \nabla f$, dall'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{e^x}{1+y^2+z^2}$$

ricaviamo

$$f(x, y, z) = \frac{e^x}{1+y^2+z^2} + g(y, z)$$

e sostituendo in

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{2e^x y}{(1+y^2+z^2)^2}$$

otteniamo

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0$$

da cui possiamo scegliere

$$g(y,z) = h(z)$$

Abbiamo quindi

$$f(x,y,z) = \frac{e^x}{1+y^2+z^2} + h(z)$$

Sostituendo in

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{2e^x z}{(1+y^2+z^2)^2}$$

troviamo che possiamo scegliere $h(x) \equiv 0$. Quindi una soluzione di $\nabla f = \mathbf{F}$ è

$$f(x,y,z) = \frac{e^x}{1+y^2+z^2}$$

b) (3 punti) calcolare il lavoro svolto dal campo $\boldsymbol{F}$ *per trasportare un punto massa dal punto* $P = O$ *al punto*

$$Q = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$$

Poiché il campo è conservativo, il lavoro svolto lungo una curva dipende solo dal punto iniziale e finale. Se quindi γ è una qualsiasi curva da P a Q, troviamo

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}\; ds = f(Q) - f(P)$$

per ogni funzione f che verifica $\nabla f = \mathbf{F}$. Usando la f trovata nel punto *a)*, abbiamo

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}\; ds = f(2,0,1) - f(0,0,0) = \frac{e^2}{2} - 1$$

Esercizio 2. (8 punti)
Sia S *la superficie in* $\mathbb{R}^3$ *data da*

$$S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; 2(y-1) = x^2+z^2\right\}$$

a) (3 punti) determinare l'equazione parametrica del piano tangente a S *nel punto* $P = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$*;*

Parametrizziamo la superficie S tramite

$$\varphi : (t,\theta) \in K \subset \mathbb{R}^2 \to (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

dove $K = \{(t,\theta)\ :\ t \geq 1\ ,\ \theta \in [0,2\pi]\}$, ponendo

$$x(t,\theta) = \sqrt{2(t-1)}\ \cos\theta$$
$$y(t,\theta) = t$$
$$z(t,\theta) = \sqrt{2(t-1)}\ \sin\theta$$

Troviamo quindi che le colonne della matrice jacobiana $D\varphi(t,\theta)$ sono

$$\varphi_t(t,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2(t-1)}} \\ 1 \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2(t-1)}} \end{pmatrix} \qquad \varphi_\theta(t,\theta) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2(t-1)}\ \sin\theta \\ 0 \\ \sqrt{2(t-1)}\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

e ricordiamo che formano la base dello spazio tangente alla superficie. Poiché $P = \varphi(3,0)$, l'equazione parametrica del piano tangente a S in P è data da

$$\pi_S(P): \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} v \qquad u,v \in \mathbb{R}$$

b) (5 punti) calcolare l'integrale

$$\int_{S\cap\{y\leq 2\}} x\ dy \wedge dz + z\ dx \wedge dy$$

Usando la parametrizzazione del punto a), possiamo scrivere

$$\int_{S\cap\{y\leq 2\}} x\ dy \wedge dz + z\ dx \wedge dy = \int_{\varphi(K\cap\{t\leq 2\})} x\ dy \wedge dz + z\ dx \wedge dy$$

Inoltre, usando il vettore normale $\varphi_t \times \varphi_\theta$ o sostituendo la parametrizzazione, troviamo

$$dy \wedge dz = \sqrt{2(t-1)}\ \cos\theta\ dt \wedge d\theta$$
$$dx \wedge dy = \sqrt{2(t-1)}\ \sin\theta\ dt \wedge d\theta$$

quindi, sostituendo le due relazioni sopra, e scrivendo $x(t,\theta)$ e $z(t,\theta)$ al posto di x e z, l'integrale diventa

$$\int_{K\cap\{t\leq 2\}} \left(2(t-1)\ \cos^2\theta + 2(t-1)\ \sin^2\theta\right) dt \wedge d\theta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 (t-1)\ dt = 2\pi$$

Esercizio 3. (10 punti)
Classificare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3(z^2 - 9)}$$

e calcolare

$$\int_{\partial^+ B(1,3)} f(z)\ dz - \int_{\partial^+ B(3,1)} f(z)\ dz$$

Il denominatore della f si annulla nei punti $z_0 = 0$, $z_1 = 3$ e $z_2 = -3$. Mentre il numeratore si annulla in z_0. Allora poiché

$$z^2 - 9 = (z - 3)(z + 3)$$

otteniamo che z_1 è polo di ordine 1, potendo scrivere per z_1

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{z - 3}$$

con g_1 olomorfa in z_1 e tale che $g_1(3) \neq 0$. Lo stesso ragionamento si ripete per z_2 che quindi è polo di ordine 1.

Per quanto riguarda $z_0 = 0$, scriviamo

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\ \frac{e^z - 1}{z(z^2 - 9)} = \frac{g_0(z)}{z^2}$$

con $g_0(z)$ olomorfa in z_0 e tale che $g_0(0) = -\frac{1}{9}$, essendo

$$g_0(z) = \frac{e^z - 1}{z(z^2 - 9)}$$

e ricordando che $\frac{e^z-1}{z} \to 1$ per $z \to 0$. Quindi z_0 è polo di ordine 2 per f.

Calcoliamo ora l'integrale usando il teorema dei residui. Il primo termine dipende solo dai residui di f nelle singolarità interne a $\partial^+ B(1,3)$, che sono z_0 e z_1. Quindi

$$\int_{\partial^+ B(1,3)} f(z)\ dz = 2\pi i\ \ (Res(f, 0) + Res(f, 3))$$

Il secondo termine dipende solo dai residui di f nelle singolarità interne a $\partial^+ B(3,1)$, che è solo z_1. Quindi

$$\int_{\partial^+ B(3,1)} f(z)\ dz = 2\pi i\ Res(f, 3)$$

Mettendo insieme i due termini si trova quindi

$$\int_{\partial^+ B(1,3)} f(z)\ dz - \int_{\partial^+ B(3,1)} f(z)\ dz = 2\pi i\ Res(f, 0)$$

Calcoliamo il residuo di f in $z_0 = 0$. Dalla formula per i residui abbiamo, usando il fatto che si tratta di un polo di ordine 2 e l'espressione $f(z) = g_0(z)/z^2$ di prima,

$$Res(f,0) = g_0'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{g_0(z) - g_0(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{9e^z - 9 + z^3 - 9z}{9z^2(z^2-9)} = -\frac{1}{18}$$

Quindi

$$\int_{\partial^+ B(1,3)} f(z)\ dz - \int_{\partial^+ B(3,1)} f(z)\ dz = 2\pi i\ Res(f,0) = -\frac{\pi i}{9}$$

Per il calcolo del residuo, si poteva anche usare l'espansione in serie dell'esponenziale e cercare il coefficiente del termine z^{-1} nell'espressione in serie per f.

Esercizio 4. (10 punti)

Un fungo spaziale è arrivato accidentalmente sulla Terra e inizia a riprodursi velocemente. Se $x(t)$ determina in metri quadrati la superficie della Terra invasa dal fungo e $S >> 1$ indica l'intera superficie terrestre, la legge di riproduzione del fungo è data da

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{cases} x^2 & se\ x < \frac{S}{2} \\ (S-x)^2 & se\ x \geq \frac{S}{2} \end{cases} \\ \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Determinare, in funzione di S, i tre istanti di tempo t_1, t_2, t_3 che impiega il fungo a ricoprire rispettivamente metà di S, due terzi di S e l'intera superficie terrestre.

Poiché $x(0) = 1 << S$, inizialmente il fungo si riprodurrà usando la legge $x'(t) = x^2$, con dato iniziale $x(0) = 1$. Separando le variabili e integrando troviamo

$$\int_1^{x(t)} \frac{1}{y^2}\ dy = \int_0^t\ ds$$

da cui

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

per $t < 1$. In $t = 1$ la soluzione esplode a infinito, ma sappiamo che appena raggiunge il valore $\frac{S}{2}$ cambia la legge di evoluzione e quindi non è più valida questa espressione.

Determiniamo l'istante di tempo t_1 in cui $x(t_1) = \frac{S}{2}$. Si trova

$$\frac{1}{1-t_1} = \frac{S}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = 1 - \frac{2}{S}$$

Pet $t > t_1$, il fungo si riprodurrà usando la legge $x'(t) = (S - x)^2$, con dato iniziale $x(t_1) = \frac{S}{2}$. Separando le variabili e integrando troviamo

$$\int_{\frac{S}{2}}^{x(t)} \frac{1}{(S-y)^2}\, dy = \int_{t_1}^{t} ds$$

da cui

$$x(t) = S - \frac{1}{t - 1 + \frac{4}{S}}$$

per $t > t_1$. Notiamo che essendo $t_1 > 1 - \frac{4}{S}$ la soluzione esiste per ogni $t > t_1$.

Determiniamo l'istante di tempo t_2 in cui $x(t_2) = \frac{2S}{3}$. Si trova

$$S - \frac{1}{t_2 - 1 + \frac{4}{S}} = \frac{2S}{3} \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = 1 - \frac{1}{S} > t_1$$

Per determinare l'istante di tempo t_3 in cui $x(t_3) = S$, ponendo

$$S - \frac{1}{t_3 - 1 + \frac{4}{S}} = S \qquad \Rightarrow \qquad t_3 = \infty$$

Quindi il fungo non riuscirà a ricoprire tutta la Terra in tempo finito. Osserviamo che la cosa si poteva anche evincere dal fatto che l'equazione differenziale $x'(t) = (S - x)^2$ ammette soluzioni localmente uniche, e $\bar{x}(t) \equiv S$ è soluzione. Quindi se per il fungo $x(t) < S$ a un certo istante, sarà $x(t) < S$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.