Calcolo delle Probabilità e Statistica
Corso di Laurea in Informatica
Compito del 30-06-2021

Esercizio 1. (10 punti)

Siano A e B due lotti costituiti ciascuno da 10 pezzi meccanici. Il lotto A contiene 2 pezzi difettosi e 8 pezzi regolari, mentre il lotto B contiene 5 pezzi difettosi e 5 pezzi regolari.

(i) Si scelgano tre pezzi (in blocco) dal lotto A, e sia X la variabile aleatoria che conta il numero dei pezzi regolari ottenuti. Calcolare $\mathbf{E}[X]$.

(ii) Avendo scelto a caso uno dei due lotti (con uguali probabilità), si prelevano tre pezzi (in blocco). Questi risultano tutti e tre regolari. Qual è la probabilità che siano stati estratti dal lotto A?

Esercizio 2. (8 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3\,x^c\,, & 0 < x < 1 \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}$$

con $c > 0$.

(i) Si determini la costante $c > 0$ in modo che la f sia la densità di una variabile aleatoria. Calcolare poi media e varianza di una variabile aleatoria X con densità f.

(ii) Siano ora $X_1, \dots, X_{60}$ variabili aleatorie indipendenti aventi la densità sopra scritta, e sia $Z = X_1 + \cdots + X_{60}$. Dare una valutazione *approssimata* per la probabilità $\mathbf{P}\{Z \leq 42\}$.

Esercizio 3. (12 punti)

Si vuole confrontare l'efficacia di due diversi sonniferi, a tale scopo i sonniferi vengono somministrati a sei volontari in due momenti differenti.

Si somministra il primo sonnifero e si misurano i seguenti tempi di addormentamento in minuti : $15\,,\ 27\,,\ 38\,,\ 18\,,\ 45\,,\ 8\,.$ L'esperimento viene modellizzato rappresentando i tempi di addormentamento con 6 variabili aleatorie indipendenti $X_1, \ldots, X_6$ con densità gaussiana $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, μ_1 e σ_1 entrambi sconosciuti.

Successivamente viene somministrato il secondo sonnifero ed i medesimi volontari si addormentano nei seguenti tempi: 10 , 23 , 35 , 10 , 45 , 10 . I tempi di addormentamento col secondo sonnifero sono modellizzati con altre 6 variabili aleatorie $Y_1, \ldots, Y_6$, indipendenti tra loro ed indipendenti dalle X_i, con densità gaussiana $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, μ_2 e σ_2 sconosciuti.

Si considerino poi le 6 variabili aleatorie $Z_1, \ldots, Z_6$ indipendenti definite come $Z_i = X_i - Y_i$, per ogni $i = 1, \ldots, 6$.

(i) Verificare che le variabili Z_i hanno densità gaussiana $N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

(ii) Pianificare un test basato sul campione $Z_1, \ldots, Z_6$ per verificare, al livello 0.05, l'ipotesi $H_0)$ $\mu_1 = \mu_2$ contro l'alternativa $H_1)$ $\mu_1 \neq \mu_2$, e dire se l'ipotesi è accettabile.

(iii) Enunciare un'ipotesi per la differenza $\mu_1 - \mu_2$ per cui il p-value dei dati sopra ottenuti risulti almeno uguale a 0.3.

Esercizio 3 per programma precedente. (12 punti)

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare le probabilità invarianti della catena.

(ii) Qual è la probabilità, partendo dallo stato 4 al tempo 0, di trovarsi in 3 al tempo 3?

(iii) Partendo dallo stato 1 al tempo 0, determinare un tempo T per cui la probabilità di trovarsi in 4 al tempo T è positiva.