Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 30-01-2018

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (14 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \log\left(1 + (x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}\right)$$

i) dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (0,0)$ nella direzione $v = \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Dato l'insieme

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}$$

i) scrivere una parametrizzazione regolare per le parti del bordo di U;

ii) detta (γ, I) una curva semplice e di classe C^1 a tratti, che ha come sostegno il bordo di U percorso in senso anti-orario, calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y + \frac{1}{x-5} \\ x^2 + e^y \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (8 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, e^{2x} + e^x + y^2 + 2y + z^3 - z = 1\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (0\,,\,-1\,,\,1)$;

ii) trovare una parametrizzazione locale della superficie Σ in un intorno del punto P.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log\left(1 + (x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}\right)$$

i) dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (0,0)$ nella direzione $v = \left(\frac{1}{2}\,,\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ si può scrivere come composizione delle funzioni $g(t) = \log(1+t)$ e $h(x,y) = (x^4+y^4)^{\frac{1}{2}}$. La funzione g è differenziabile su tutto il suo dominio $\{t > -1\}$, e h è differenziabile certamente nei punti in $x^4 + y^4 \neq 0$. Purtroppo nel punto $P = (0,0)$ vale $x^4 + y^4 = 0$, quindi non possiamo concludere dai teoremi di carattere generale che la funzione f è differenziabile in P.

Per determinare l'esistenza della derivata direzionale di f in P nella direzione $v = \left(\frac{1}{2}\,,\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, abbiamo dunque, senza cercare prima di verificare la differenziabilità della funzione, un'unica possibilità, usare la definizione di derivata direzionale. Dobbiamo quindi studiare l'esistenza del limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P+tv) - f(P)}{t}$$

Usando $\log(1+s) = s + o(s)$ per $s \to 0$, si trova

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P+tv) - f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(t\frac{1}{2}\,,\, t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(1 + t^2\,(\frac{5}{8})^{\frac{1}{2}}\right) - 0}{t} = 0\,,$$

dunque la derivata direzionale di f nel punto $P = (0,0)$ nella direzione $v = \left(\frac{1}{2}\,,\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ esiste ed è uguale a 0.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}\,.$$

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

Abbiamo visto nel punto i) che f è certamente differenziabile su $\mathbb{R}^2\setminus\{x^4+y^4=0\} = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, e non abbiamo calcolato se sia differenziabile anche in $(0,0)$. Potremmo studiare la differenziabilità in $(0,0)$ (scopriremmo che f è differenziabile e che si tratta di un punto critico), ma ai fini dell'esercizio basta annotare $P = (0,0)$ come punto da considerare. Cerchiamo poi punti critici di f in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ossia soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{1+(x^4+y^4)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{2\,x^3}{(x^4+y^4)^{\frac{1}{2}}} = 0 \\ \frac{1}{1+(x^4+y^4)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{2\,y^3}{(x^4+y^4)^{\frac{1}{2}}} = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Si vede facilmente che non ci sono soluzioni, dunque nello studio della parte interna di Ω, annotiamo solo il punto $P = (0,0)$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$, che è la circonferenza

$$\Gamma = \left\{x^2 + y^2 = 1\right\} .$$

e dunque non ci sono spigoli. Consideriamo Γ come insieme di livello della funzione differenziabile $G(x, y) = x^2 + y^2$. Il gradiente di G non si annulla su Γ, e possiamo quindi applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{1+(x^4+y^4)^{\frac12}} \, \frac{2\,x^3}{(x^4+y^4)^{\frac12}} = \lambda\, 2x \\ \frac{1}{1+(x^4+y^4)^{\frac12}} \, \frac{2\,y^3}{(x^4+y^4)^{\frac12}} = \lambda\, 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Studiando la prima equazione otteniamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{1+(x^4+y^4)^{\frac12}} \, \frac{2\,y^3}{(x^4+y^4)^{\frac12}} = \lambda\, 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{1+(x^4+y^4)^{\frac12}} \, \frac{x^2}{(x^4+y^4)^{\frac12}} = \lambda \\ \frac{1}{1+(x^4+y^4)^{\frac12}} \, \frac{2\,y^3}{(x^4+y^4)^{\frac12}} = \lambda\, 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dal primo sottosistema ricaviamo due punti critici vincolati $Q_1 = (0,1)$ e $Q_2 = (0,-1)$. Nel secondo sottosistema sostituiamo la seconda equazione nella terza, e otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{1 + (x^4 + y^4)^{\frac12}} \, \frac{2\,y^3}{(x^4 + y^4)^{\frac12}} = 2y \, \frac{1}{1 + (x^4 + y^4)^{\frac12}} \, \frac{x^2}{(x^4 + y^4)^{\frac12}}$$

che si riduce a

$$y^3 = x^2\, y$$

Dunque il secondo sottosistema si riduce (ignorando l'equazione per λ) a

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y^3 = x^2\, y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ y^2 = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Troviamo quindi altri punti critici vincolati:
$Q_3 = (1,0)$ e $Q_4 = (-1,0)$ nel caso $y = 0$;
$Q_5 = (\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2})$, $Q_6 = (\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2})$, $Q_7 = (-\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2})$ e $Q_8 = (-\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2})$ nel caso $x^2 = y^2$.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = 0\,, \qquad f(Q_1) = f(Q_2) = f(Q_3) = f(Q_4) = \log 2$$

$$f(Q_5) = f(Q_6) = f(Q_7) = f(Q_8) = \log\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Dunque il minimo è 0, e il massimo è $\log 2$.

Esercizio 2. *Dato l'insieme*

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \le y \le \sqrt{4 - x^2} \right\}$$

i) scrivere una parametrizzazione regolare per le parti del bordo di U;

L'insieme U è rappresentato nella figura 1. Gli spigoli del bordo sono i punti

$$S_1 = (2\,,\,0) \quad \text{e} \quad S_2 = (-2\,,\,0)$$

Possiamo dividere il bordo in due parti

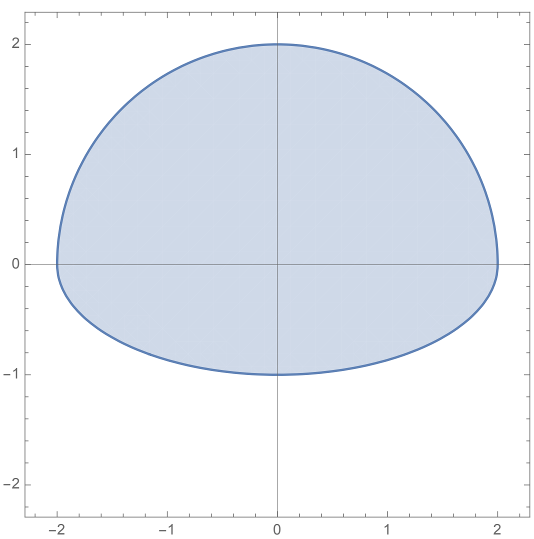

Figure 1: L'insieme U.

$$\Gamma_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 4\,,\, y \ge 0 \right\}$$

$$\Gamma_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\,,\, y \le 0 \right\}$$

Γ_1 è una parte della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$, che si può parametrizzare usando la funzione

$$\gamma_1(t) = (2\,\cos t\,,\, 2\,\sin t)$$

e restringiamo l'angolo t all'intervallo individuato dai due punti S_1 e S_2 e dalla condizione $y \ge 0$. Usando la parametrizzazione γ_1 si trova

$$S_1 = \gamma_1\,(0) \quad \text{e} \quad S_2 = \gamma_1\,(\pi)$$

Quindi la parametrizzazione di Γ_1 è

$$\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 , \qquad \gamma_1(t) = \Big(2\,\cos t \,,\, 2\,\sin t\Big)$$

Γ_2 è una parte dell'ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, che si può parametrizzare usando la funzione

$$\gamma_1(t) = (2\,\cos t \,,\, \sin t)$$

e restringiamo l'angolo t all'intervallo individuato dai due punti S_1 e S_2 e dalla condizione $y \geq 0$. Usando la parametrizzazione γ_1 si trova

$$S_1 = \gamma_1\,(2\pi) \quad \text{e} \quad S_2 = \gamma_1\,(\pi)$$

Quindi la parametrizzazione di Γ_1 è

$$\gamma_1 : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 , \qquad \gamma_1(t) = \Big(2\,\cos t \,,\, \sin t\Big)$$

ii) detta (γ, I) una curva semplice e di classe C^1 a tratti, che ha come sostegno il bordo di U percorso in senso anti-orario, calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y + \frac{1}{x-5} \\ x^2 + e^y \end{pmatrix}$$

Il campo $\mathbf{F}$ è differenziabile sul suo dominio naturale $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 5\}$, e la curva (γ, I) è chiusa per definizione (essendo la parametrizzazione del bordo), inoltre $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 5\}$, dunque sono verificate tutte le ipotesi del Teorema del Rotore. Possiamo quindi scrivere

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \iint_U \operatorname{rot}(\mathbf{F})(x, y)\, dxdy$$

Calcoliamo innanzitutto il rotore del campo

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F})(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 2x - 1\,.$$

Osserviamo poi che U si scrive come insieme semplice rispetto alla y ponendo

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2 \leq x \leq 2\,,\, -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}.$$

Dunque

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \iint_U \operatorname{rot}(\mathbf{F})(x, y)\, dxdy = \int_{-2}^{2} \left(\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{4-x^2}} (2x - 1)\, dy\right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(2x\,\sqrt{4 - x^2} + 2x\,\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right) dy - \frac{1}{2}\Big(\text{Area}\{x^2 + y^2 = 4\} + \text{Area}\left\{\frac{x^2}{4} + y^2 = 1\right\}\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(4\pi + 2\pi\Big) = -3\pi\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, e^{2x} + e^x + y^2 + 2y + z^3 - z = 1\big\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ *nel punto* $P = (0\,,\,-1\,,\,1)$*;*

Possiamo considerare Σ come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = e^{2x} + e^x + y^2 + 2y + z^3 - z$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\,e^{2x} + e^x \\ 2y+2 \\ 3z^2 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \nabla F\,(0\,,\,-1\,,\,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$3\,(x-0) + 2\,(z-1) = 0\,.$$

ii) trovare una parametrizzazione locale della superficie Σ *in un intorno del punto* P*.*

Per il Teorema delle Funzioni Implicite, siamo certi di poter trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione in un intorno dei punti in cui non si annulla il gradiente di F, condizione verificata nel punto P.

Poiché

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(P) \neq 0\,,$$

possiamo scegliere se applicare il teorema rispetto alla x o rispetto alla z.

Se scegliamo di applicarlo rispetto alla x, otteniamo che esistono un intorno $U(-1,1)$, un intorno $V(0)$ ed una funzione $g(y,z) : U \to V$ tale che $g(-1,1) = 0$ e $F(g(y,z), y, z) = 0$ per ogni $(y,z) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione g. Dall'equazione

$$F(g(y,z), y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2g(y,z)} + e^{g(y,z)} + y^2 + 2y + z^3 - z - 1 = 0$$

troviamo

$$e^{g(y,z)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(y^2 + 2y + z^3 - z - 1)}}{2}$$

e imponendo la condizione $g(-1,1) = 0$,

$$e^{g(y,z)} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(y^2 + 2y + z^3 - z - 1)}}{2} \quad \Rightarrow \quad g(y,z) = \log\Big(\frac{-1 + \sqrt{1 - 4(y^2 + 2y + z^3 - z - 1)}}{2}\Big)$$

La parametrizzazione locale di Σ è quindi data da

$$\sigma(u,v) = (g(u,v),\, u,\, v)$$

con $(u, v) \in U$, dove

$$g(u, v) = \log\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - 4(u^2 + 2u + v^3 - v - 1)}}{2}\right).$$

Se scegliamo di applicare invece il Teorema delle Funzioni Implicite rispetto alla z, otteniamo che esistono un intorno $U(0, -1)$, un intorno $V(1)$ ed una funzione $h(x, y) : U \to V$ tale che $h(0, -1) = 1$ e $F(x, y, h(x, y)) = 0$ per ogni $(x, y) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione h. Dall'equazione

$$F(x, y, h(x, y)) = 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} + e^x + y^2 + 2y + h(x, y)^3 - h(x, y) - 1 = 0$$

Non risulta tuttavia agevole in questo caso ottenere l'espressione esplicita della funzione $h(x, y)$.