Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 29-01-2015

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \log\left(1 + \frac{1}{4}x^2 + y^2\right)$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$$

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1\,,\, 0 \le y \le x - x^3\right\} .$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega x \; dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1\,,\, x^2 + (y-1)^2 \le 1\,,\, y \le x + \frac{1}{2}\right\}$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 - z\,\sin(y^2) + x\,z^4 = 0\right\}$$

i) dire per quali dei seguenti punti di Σ è possibile determinare l'esistenza del piano tangente a Σ, e in caso affermativo scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) dire per quali dei punti P, Q è possibile trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione, e in caso affermativo scrivere una parametrizzazione locale esplicita.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log\left(1 + \frac{1}{4}x^2 + y^2\right)$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$$

La funzione è la composizione della funzione logaritmo e di un polinomio, dunque è definita quando l'argomento del logaritmo è positivo. Poiché $1 + \frac{1}{4}x^2 + y^2 > 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha che la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Il denominatore della frazione che si chiede di studiare nel limite è sempre ben definito e si annulla solo in $(0,0)$. Dunque $(0,0)$ è un punto di accumulazione per il dominio della frazione che dobbiamo studiare, e ha senso studiare il limite richiesto.

Innanzitutto possiamo usare il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$, per cui ponendo $t = \frac{1}{4}x^2 + y^2$, scriviamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{4}x^2 + y^2\right)}{|x|+|y|} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{4}x^2 + y^2}{|x|+|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{4}x^2 + y^2}{|x|+|y|}\,.$$

Studiamo ora il comportamento del limite rimasto lungo le rette della forma $y = \lambda x$, con $\lambda > 0$. Si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)\,,\, y=\lambda x} \frac{\frac{1}{4}x^2 + y^2}{|x|+|y|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{4} + \lambda^2\right)x^2}{(1+\lambda)\,|x|} = 0\,, \quad \forall\,\lambda\,.$$

Proviamo quindi a dimostrare che il limite esiste ed è uguale a zero. Usiamo la disuguaglianza notevole $|x| + |y| \geq \sqrt{x^2+y^2}$, e $\frac{1}{4}x^2 \leq x^2$, e otteniamo

$$0 \leq \left|\frac{\frac{1}{4}x^2 + y^2}{|x|+|y|}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = g(x,y)\,.$$

Poiché banalmente $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$, si conclude che il limite esiste ed è uguale a zero.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq x - x^3\right\}\,.$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

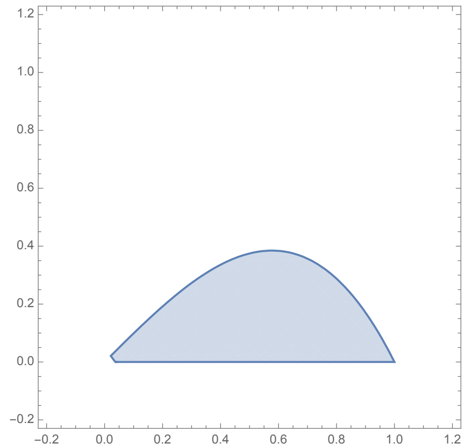

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

La funzione f è di classe C^1 sul suo dominio, quindi non ci sono punti di non derivabilità e per trovare i punti critici dobbiamo risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{4}x^2+y^2} = 0 \\ \frac{2y}{1+\frac{1}{4}x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione $(0,0)$ del sistema non è interna a $\bar{\Omega}$, ma uno spigolo.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Il bordo è composto di due parti, gli insiemi

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1\,,\, y = 0\right\} \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1\,,\, y = x - x^3\right\}\,.$$

Dunque gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Per studiare il comportamento di f su Γ_1 usiamo la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log\left(1 + \frac{1}{4}t^2\right), \qquad t \in [0,1]\,.$$

Abbiamo $g_1'(t) = \frac{2t}{4+t^2}$, dunque l'unico punto critico è $t_0 = 0$, che corrisponde allo spigolo S_1.

Per studiare il comportamento di f su Γ_2 usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con la funzione

$$G_2(x,y) = y - x + x^3\,.$$

Dobbiamo dunque cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla G_2(x,y) \\ G_2(x,y) = 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{4}x^2+y^2} = \lambda(3x^2-1) \\ \frac{2y}{1+\frac{1}{4}x^2+y^2} = \lambda \\ y - x + x^3 = 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione possiamo sostituire il valore di λ nella prima, e poi semplificare il denominatore che non si annulla mai, e dalla terza equazione abbiamo y in funzione di x, per cui troviamo

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = 2y(3x^2-1) \\ \frac{2y}{1+\frac{1}{4}x^2+y^2} = \lambda \\ y - x + x^3 = 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}x = 2x(1-x^2)(3x^2-1) \\ \frac{2y}{1+\frac{1}{4}x^2+y^2} = \lambda \\ y - x + x^3 = 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Nella prima possiamo supporre $x \neq 0$, infatti $x = 0$ ci restituisce ancora una volta lo spigolo S_1, e semplifichiamo per x, ottenendo

$$\begin{cases} 4(3x^2-1)(1-x^2) = 1 \\ \frac{2y}{1+\frac{1}{4}x^2+y^2} = \lambda \\ y - x + x^3 = 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

La prima equazione del sistema la riscriviamo come

$$12x^4 - 16x^2 + 5 = 0\,,$$

che ha soluzioni $x_1^2 = \frac{5}{6}$ e $x_2^2 = \frac{1}{2}$. Quindi, poiché ci interessano soltanto valori di $x \in [0,1]$, usando $y = x(1-x^2)$ troviamo due soluzioni del sistema, che ci restituiscono due punti critici vincolati

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} \\ \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = f(0,0) = 0\,, \quad f(S_2) = f(1,0) = \log\frac{5}{4}\,,$$

$$f(Q_1) = f\left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = \log\frac{133}{108}\,, \quad f(Q_2) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \log\frac{5}{4}\,.$$

per cui il massimo di f è $\log\frac{5}{4}$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega x \; dx\, dy$$

dove $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,,\; x^2+(y-1)^2 \le 1\,,\; y \le x+\frac{1}{2}\big\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

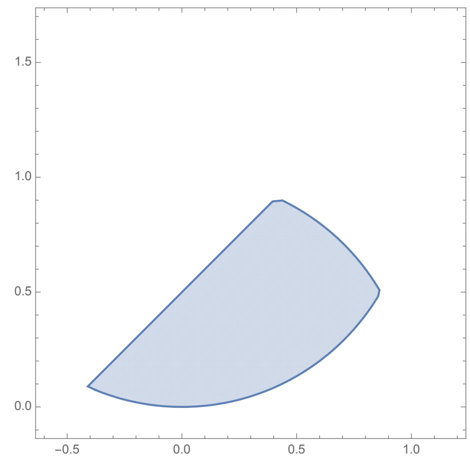

Figure 2: L'insieme Ω.

Dalla figura si vede che Ω si può scrivere come unione di due insiemi semplici, precisamente

$$\Omega_1 = \left\{(x,y) \,:\, a \le x \le b\,,\; 1-\sqrt{1-x^2} \le y \le x+\frac{1}{2}\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x,y) \,:\, b \le x \le c\,,\; 1-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

dove i valori a, b, c sono le ascisse dei punti di intersezione delle tre curve che determinano l'insieme Ω. In particolare, a è il valore dell'ascissa della soluzione di

$$\begin{cases} y = x+\frac{1}{2} \\ x^2+(y-1)^2 = 1 \\ x < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x+\frac{1}{2} \\ x^2+(x-\frac{1}{2})^2-1 = 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

per cui troviamo

$$a = \frac{1-\sqrt{7}}{4}\,.$$

Invece b è il valore dell'ascissa della soluzione di

$$\begin{cases} y = x+\frac{1}{2} \\ x^2+y^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x+\frac{1}{2} \\ x^2+(x+\frac{1}{2})^2-1 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

per cui troviamo

$$b = \frac{\sqrt{7}-1}{4}\,.$$

Infine c è il valore dell'ascissa della soluzione di

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ x^2+y^2=1 \\ x>0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ 2y=1 \\ x>0 \end{cases}$$

per cui troviamo

$$c=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Dunque

$$\iint_\Omega x\;dx\,dy = \iint_{\Omega_1} x\;dx\,dy + \iint_{\Omega_2} x\;dx\,dy =$$

$$= \int_{\frac{1-\sqrt{7}}{4}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{4}} \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x+\frac{1}{2}} x\;dy \right) dx + \int_{\frac{\sqrt{7}-1}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\;dy \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{1-\sqrt{7}}{4}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{4}} \left(x(x+\frac{1}{2}) - x(1-\sqrt{1-x^2}) \right) dx + \int_{\frac{\sqrt{7}-1}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(x\sqrt{1-x^2} - x(1-\sqrt{1-x^2}) \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{1-\sqrt{7}}{4}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{4}} \left(x^2 - \frac{1}{2}x + x\sqrt{1-x^2} \right) dx + \int_{\frac{\sqrt{7}-1}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(2x\sqrt{1-x^2} - x \right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_{\frac{1-\sqrt{7}}{4}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{4}} + \left(-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right) \Bigg|_{\frac{\sqrt{7}-1}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)^3 - \frac{11}{24} + \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{7}+4}{8}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{4-\sqrt{7}}{16}\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 - z\,\sin(y^2) + x\,z^4 = 0 \right\}$$

i) dire per quali dei seguenti punti di Σ è possibile determinare l'esistenza del piano tangente a Σ, e in caso affermativo scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione di classe C^1

$$F(x,y,z) = x^2 - z\,\sin(y^2) + x\,z^4$$

dunque certamente esiste il piano tangente nei punti di Σ in cui non si annulla il gradiente di F. Abbiamo

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + z^4 \\ -2yz\,\cos(y^2) \\ -\sin(y^2) + 4xz^3 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\nabla F(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il piano tangente a Σ esiste certamente in Q, e la sua equazione cartesiana è

$$x + 4z - 3 = 0\,.$$

ii) dire per quali dei punti P, Q è possibile trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione, e in caso affermativo scrivere una parametrizzazione locale esplicita.

Per il Teorema delle Funzioni Implicite, siamo certi di poter trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione in un intorno dei punti in cui non si annulla il gradiente di F, dunque nel punto Q. Abbiamo che

$$\frac{\partial F}{\partial x}(Q) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(Q) \neq 0\,,$$

dunque possiamo scegliere di trattare come variabile dipendente dalle altre due la x o la z. Poiché vogliamo ottenere un'espressione esplicita per la parametrizzazione, sembra più trattabile il caso della x.

Dunque sappiamo che esistono un intorno $U(0,1)$, un intorno $V(-1)$ ed una funzione $g(y,z) : U \to V$ tale che $g(0,1) = -1$ e $F(g(y,z), y, z) = 0$ per ogni $(y,z) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione g. Dall'equazione

$$F(g(y,z), y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^2(y,z) + z^4\, g(y,z) - z\,\sin(y^2) = 0$$

troviamo che le due possibili scelte sono

$$\frac{-z^4 \pm \sqrt{z^8 + 4z\,\sin(y^2)}}{2},$$

imponendo poi la condizione $g(0,1) = -1$, ricaviamo che dobbiamo scegliere la soluzione con il segno meno, ossia

$$g(y,z) = \frac{-z^4 - \sqrt{z^8 + 4z\,\sin(y^2)}}{2}.$$

La parametrizzazione locale di Σ è quindi data da

$$\sigma(u,v) = (g(u,v),\, u,\, v) \qquad \text{con} \qquad (u,v) \in U(0,1)\,.$$