Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 28-01-2020

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \sin(x^2\, y^3)$$

i) dire se esiste, e in caso affermativo, calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^4 + 2y^4}\,;$$

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1\,,\; y \ge x - 1\,,\; x^2 + y^3 \le 1\Big\}\;.$$

Esercizio 2. (8 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0\,,\, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(1 - 2\cos t\,,\, \sin t\Big)$$

i) dire in quali punti P esiste la retta tangente al sostegno della curva;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{16 - x^2} \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{y-2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie elementare Σ con parametrizzazione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(u,v) = \Big(u\,,\, v\,,\, \log(1 + \sqrt{u^2+v^2})\Big)$$

con $D = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u^2 + v^2 \le 100\big\}$,

i) scrivere, se è possibile, le equazioni parametrica e cartesiana del piano tangente a Σ nei punti $P = (0,0,0)$ e $Q = (3,4,\log 6)$;

ii) fare un disegno approssimativo di Σ.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \sin(x^2\, y^3)$$

i) dire se esiste, e in caso affermativo, calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^4+2y^4}\,;$$

Il limite ha senso poiché $(0,0)$ è un punto di accumulazione per il dominio della funzione $\frac{f(x,y)}{x^4+y^4}$ di cui dobbiamo calcolare il limite. Usando la relazione $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ possiamo scrivere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^4+2y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\, y^3}{x^4+2y^4}\,.$$

Iniziamo studiando il limite lungo alcune direzioni. Iniziamo con le rette $\{y=\lambda x\}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lambda^3\, x^5}{(1+2\lambda^4)x^4} = 0\,, \forall\, \lambda$$

Passando alle curve della forma $\{y = x^\alpha\}$ con $\alpha > 0$, si trova

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2+3\alpha}}{x^4+2x^{4\alpha}} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2+3\alpha}}{2x^{4\alpha}+o(x^{4\alpha})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2-\alpha}}{2+o(1)} = 0\,, & \text{se } \ 0 < \alpha \le 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2+3\alpha}}{x^4+o(x^4)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3\alpha-2}}{1+o(1)} = 0\,, & \text{se } \ \alpha > 1 \end{cases}$$

Avendo ottenuto sempre lo stesso limite, proviamo a dimostrare l'esistenza del limite applicando il Teorema del Confronto. Possiamo scrivere

$$0 \le \left| \frac{x^2\, y^3}{x^4+2y^4} \right| \le \frac{(x^4+y^4)|y|}{2(x^4+2y^4)} \le \frac{(x^4+y^4)|y|}{x^4+y^4} = |y| =: g(x,y)$$

Poiché la funzione $g(x,y)$ trovata è definita in un intorno di $(0,0)$, verifica la disuguaglianza vista sopra e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

abbiamo dimostrato che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^4+2y^4} = 0$$

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1\,,\, y \ge x-1\,,\, x^2+y^3 \le 1 \right\}\,.$$

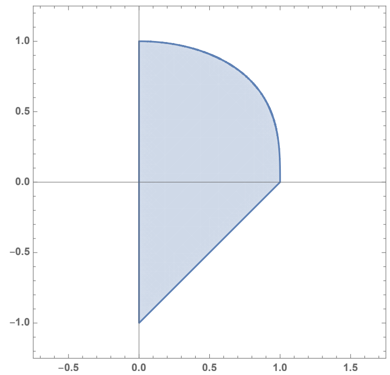

Figure 1: L'insieme Ω.

L'insieme Ω si può riscrivere nella forma

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1 \,,\, x - 1 \le y \le (1 - x^2)^{\frac{1}{3}} \right\}$$

ed è rappresentato nella figura 1.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

La funzione f si può scrivere come composizione della funzione $g(x, y) = x^2 y^3$ e della funzione $h(t) = \sin t$, entrambe funzioni differenziabili nel loro dominio naturale. Quindi la funzione f è differenziabile nel suo dominio naturale che è $\mathbb{R}^2$. Per cercare punti critici liberi interni a Ω cerchiamo dunque le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2xy^3 \, \cos(x^2\, y^3) = 0 \\ 3x^2y^2 \, \cos(x^2\, y^3) = 0 \end{cases}$$

che sono interne a Ω. Il sistema ha come soluzioni tutti i punti della forma $(x, 0)$, tutti i punti della forma $(0, y)$, e le soluzioni di $x^2y^3 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

I punti della forma $(x, 0)$ sono interni a Ω per $x \in (0, 1)$, e quindi vanno considerati. Registriamo quindi come punti da prendere in considerazione i punti

$$C = (x \,,\, 0)$$

I punti della forma $(0, y)$ non sono interni a Ω, ma sono sul bordo. Infine le curve $x^2y^3 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono esterne a Ω per ogni $k \in \mathbb{Z}$ come si verifica osservando che $|y|^3 = |\frac{\pi}{2} + k\pi| \frac{1}{x^2} > 1$ per ogni $x \in (0, 1)$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$, mentre per i punti di Ω vale $|y| < 1$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Come spigoli indichiamo i punti

$$S_1 = (0 \,,\, -1) \,, \qquad S_2 = (1 \,,\, 0) \quad \text{e} \quad S_3 = (0 \,,\, 1)$$

poiché dividiamo il bordo in tre parti

$$\Gamma_1 = \{x = y + 1 \,,\, -1 \le y \le 0\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ x = \sqrt{1 - y^3} \, , \, 0 \le y \le 1 \right\}$$

$$\Gamma_3 = \{ x = 0 \, , \, -1 \le y \le 1 \}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t + 1 \, , \, t) \, , \qquad t \in [-1 \, , \, 0] \, ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \sin \left(t^5 + 2t^4 + t^3 \right), \qquad t \in [-1 \, , \, 0] \, , .$$

Si trova $g_1'(t) = t^2(5t^2 + 8t + 3) \cos(t^5 + 2t^4 + t^3)$, che si annulla in $t_0 = -\frac{3}{5} \in (-1 \, , \, 0)$, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_1(0) = \left(\frac{2}{5} \, , \, -\frac{3}{5} \right) \, .$$

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(\sqrt{1 - t^3} \, , \, t \right), \qquad t \in [0 \, , \, 1] \, ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \sin \left(t^3 - t^6 \right), \qquad t \in [0 \, , \, 1] \, .$$

Si trova $g_2'(t) = 3t^2(1 - 2t^3) \cos(t^3 - t^6)$, che si annulla in $t_0 = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} \in (0 \, , \, 1)$, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_2 = \gamma_2(0) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \, , \, \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \right) \, .$$

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = (0 \, , \, t) \, , \qquad t \in [-1 \, , \, 1] \, ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = 0, \qquad t \in \left[-\frac{1}{2} \, , \, 1 \right] \, .$$

Ne segue che tutti i punti sono critici vincolati, e per i valori della funzione prendiamo in considerazione quelli degli spigoli S_1 e S_3,

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C) = f(S_1) = f(S_2) = f(S_3) = 0 \, , \quad f(Q_1) = \sin \left(-\frac{108}{5^5} \right), \quad f(Q_2) = \sin \left(\frac{1}{4} \right)$$

Poiché $-\frac{108}{5^5} > -\frac{\pi}{2}$ e $\frac{1}{4} < \frac{\pi}{2}$, il massimo di f è $\sin\left(\frac{1}{4}\right)$ e il minimo è $\sin\left(-\frac{108}{5^5}\right)$.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0\,,\,2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(1 - 2\cos t\,,\,\sin t\Big)$$

i) dire in quali punti P esiste la retta tangente al sostegno della curva;

La curva (γ, I) ha parametrizzazione $\gamma(t) \in C^1(I)$, quindi possiamo calcolare il vettore tangente

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Nell'intervallo $I = [0, 2\pi]$ troviamo che $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni t, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti.

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{16 - x^2} \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{y-2} \end{pmatrix}$$

Il dominio naturale del campo $\mathbf{F}$ è

$$X = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,:\,|x| \leq 4\,,\,y \neq 2\big\}\,,$$

e il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale poiché

$$\text{rot}\;\mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = x - 1$$

Il sostegno della curva è il bordo dell'ellisse di centro $C = (1, 0)$ e semiassi $a = 2$ e $b = 1$, quindi è interamente contenuto nel dominio X del campo. Inoltre la curva (γ, I)è una curva chiusa percorsa in senso orario, quindi scrivendo

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,:\,\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}$$

per la parte U di X racchiusa dal sostegno della curva, è possibile applicare il Teorema del Rotore per cui

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = -\iint_U \text{rot}\;\mathbf{F}(x, y)\,dxdy = -\iint_U (x-1)\,dxdy$$

Poiché possiamo scrivere U come insieme semplice rispetto alla y nella forma

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,:\,-1 \leq x \leq 3\,,\,-\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}} \leq y \leq \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}}\right\}$$

possiamo applicare la formula di riduzione per integrali doppi e scrivere

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = -\int_{-1}^{3}\left(\int_{-\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}} (x-1)\,dy\right)dx =$$

$$= -\int_{-1}^{3} 2(x-1)\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}} = \frac{8}{3}\Big(1-\frac{(x-1)^2}{4}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{3} = 0$$

Esercizio 3. *Data la superficie elementare* Σ *con parametrizzazione*

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(u,v) = \Big(u\,,\, v\,,\, \log(1+\sqrt{u^2+v^2})\Big)$$

con $D = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u^2+v^2 \leq 100\big\}$*,*

i) scrivere, se è possibile, le equazioni parametrica e cartesiana del piano tangente a Σ *nei punti* $P = (0,0,0)$ *e* $Q = (3,4,\log 6)$*;*

Data la parametrizzazione di una superficie elementare, è possibile scrivere le equazioni del piano tangente in un punto $R = (x_0, y_0, z_0)$ se esistono (u_0, v_0) interni a D tali che: $\sigma(u_0, v_0) = R$; σ sia differenziabile in (u_0, v_0); la matrice $J\sigma(u_0, v_0)$ abbia rango due.

Per $P = (0,0,0)$ si trova $(u_0, v_0) = (0,0)$, che è interno a D, ma la funzione $\log(1+\sqrt{u^2+v^2})$ non è differenziabile in $(0,0)$. Quindi non possiamo scrivere le equazioni del piano tangente a Σ in P (in effetti non esiste il piano tangente in P).

Per $Q = (3,4,\log 6)$ si trova $(u_0, v_0) = (3,4)$, che è interno a D. Inoltre σ è differenziabile in $(3,4)$, e si ha

$$J\sigma(3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}\,(1+\sqrt{u^2+v^2})} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}\,(1+\sqrt{u^2+v^2})} \end{pmatrix}\Bigg|_{u=3,v=4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{3}{30} & \frac{4}{30} \end{pmatrix}$$

che ha rango due. Quindi possiamo scrivere le equazioni del piano tangente a Σ in Q.

L'equazione parametrica è

$$\begin{cases} x(s,t) = 3+s \\ y(s,t) = 4+t \\ z(s,t) = \log 6 + \frac{3}{30}s + \frac{4}{30}t \end{cases}$$

L'equazione parametrica si scrive usando il vettore normale alla superficie che si ottiene facendo il prodotto vettoriale delle due colonne di $J\sigma(3,4)$. Quindi

$$n(3,4) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{30} \\ -\frac{4}{30} \\ 1 \end{pmatrix}$$

e l'equazione cartesiana è quindi

$$-\frac{3}{30}(x-3) - \frac{4}{30}(x-4) + (z - \log 6) = 0$$

ii) fare un disegno approssimativo di Σ*.*

La superficie Σ è parametrizzata come superficie cartesiana, in particolare come grafico della funzione

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = \log(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$$

Si ottiene quindi il disegno nella figura 2. Il disegno si poteva ottenere anche osservando che la

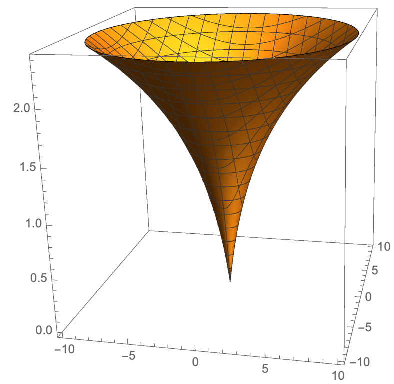

Figure 2: La superficie Σ.

superficie si riscrive come superficie di rotazione.