Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 28-01-2012

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} z^3 + \overline{2i}\, z = 2z \\ |e^z| \le e \end{cases}$$

Esercizio 2. (6 punti) (Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le equazioni cartesiane di immagine e nucleo dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k+1 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (8 punti) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;:\; \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

i) trovare un supplementare W di U in $\mathbb{R}^4$;

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che verifichi $L_A(U) = W$ e $\ker(L_A) = W$.

Esercizio 4. (6 punti) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione dello spazio delle soluzioni $\mathcal{S}$ del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + kx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k+1)x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

e scriverne le soluzioni esplicitamente solo per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{S}$ ha dimensione 1.

Esercizio 5. (8 punti) Dire se le seguenti matrici sono triangolabili su $\mathbb{R}$, e rispetto a quale base:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ -6 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Svolgimento

- **<u>Esercizio 1</u>** *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} z^3 + \overline{2i}\, z = 2z \\ |e^z| \le e \end{cases}$$

La prima equazione del sistema si scrive

$$z^3 - 2i\, z = 2z \quad \Longleftrightarrow \quad z^3 = 2(1+i)\, z$$

che ha come soluzioni

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{8}}, \quad z_3 = \sqrt{2\sqrt{2}}\, e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

La seconda condizione del sistema si traduce nella condizione

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \le e \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) \le 1$$

Quindi da

$$\mathrm{Re}(z_1) = 0, \quad \mathrm{Re}(z_2) = \sqrt{2\sqrt{2}}\, \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad \mathrm{Re}(z_3) = -\sqrt{2\sqrt{2}}\, \cos\left(\frac{\pi}{8}\right),$$

si ricava che le soluzioni del sistema sono

$$z_1 = 0 \quad \text{e} \quad z_3 = \sqrt{2\sqrt{2}}\, e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

Per escludere z_2, si può usare

$$\sqrt{2\sqrt{2}}\, \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \ge \sqrt{2\sqrt{2}}\, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{\frac{1}{4}} > 1$$

- **<u>Esercizio 2</u>** *Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le equazioni cartesiane di immagine e nucleo dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k+1 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante di A si trova $\det(A) = 2k^2 + 2k = 2k(k+1)$, quindi per $k \notin \{-1, 0\}$ la matrice definisce un'applicazione lineare invertibile. Allora per $k \notin \{-1, 0\}$ si ha $\mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^3$ e $\ker(L_A) = \{\underline{0}\}$, che in forma cartesiana si possono scrivere

$$\mathrm{Im}(L_A) = \{0 = 0\}, \qquad \ker(L_A) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Nel caso $k = -1$, riduciamo la matrice A a scala. Si ottiene

$$A \sim S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi troviamo $\dim(\mathrm{Im}(L_A)) = 2$ e

$$\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \{x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

mentre per il nucleo si trova $\dim(\ker(L_A)) = 1$ e

$$\ker(L_A) = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Notare che non abbiamo avuto bisogno di risolvere il sistema $S\underline{x} = \underline{0}$, visto che si richiedeva l'equazione cartesiana.

Nel caso $k = 0$, riduciamo la matrice A a scala. Si ottiene

$$A \sim S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi troviamo $\dim(\mathrm{Im}(L_A)) = 2$ e

$$\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \{x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0\}$$

mentre per il nucleo si trova $\dim(\ker(L_A)) = 1$ e

$$\ker(L_A) = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

- **<u>Esercizio 3</u>** *Dato il sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

i) trovare un supplementare W di U in $\mathbb{R}^4$;

Troviamo una base di U risolvendo il sistema. Per farlo partiamo dalla matrice dei coefficienti C, che è già a scala, infatti

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Adesso completiamo la base di U a un insieme di generatori di $\mathbb{R}^4$ con i vettori della base canonica e ne estraiamo una base. Scriviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

e quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ se scegliamo

$$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(Senza usare la riduzione a scala, si poteva subito notare che, chiamando u_1e u_2 i due vettori della base di U, si ha $e_3 = u_1 - e_1 + e_2$ e $e_4 = u_2 - e_1$, quindi $\{u_1, u_2, e_1, e_2\}$ sono una base di $\mathbb{R}^4$.)

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che verifichi $L_A(U) = W$ e $\ker(L_A) = W$.

Dal punto precedente, ricaviamo una base di $\mathbb{R}^4$ su cui definire L_A e le basi di U e W. Per soddisfare le richieste possiamo definire

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con questa scelta la matrice A, rispetto alla base canonica, è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo usato

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Esercizio 4** *Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione dello spazio delle soluzioni $\mathcal{S}$ del sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + kx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k+1)x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

e scriverne le soluzioni esplicitamente solo per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{S}$ ha dimensione 1.

Il sistema lineare è quadrato, quindi calcoliamo innanzitutto il rango della matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ k+1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si trova $\det(A) = 2k^2 + 2k = 2k(k+1)$, quindi il rango di A è 3 se $k \notin \{-1, 0\}$. Ne segue che se $k \notin \{-1, 0\}$, la matrice A è invertibile e il sistema ammette soluzione unica, quindi $\dim \mathcal{S} = 0$.

Poniamo ora $k = -1$. Applichiamo il Teorema di Rouchè-Capelli. La matrice A ha rango 2, come si vede ad esempio calcolando il determinante del primo minore principale 2×2, mentre la matrice completa

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

ha rango 3, come si vede calcolando il determinante del minore 3×3 che si ottiene eliminando l'ultima colonna di A. Quindi per $k = -1$ il sistema non è compatibile e $\mathcal{S} = \emptyset$.

Poniamo ora $k = 0$. Applicando di nuovo il Teorema di Rouchè-Capelli, troviamo che la matrice A ha rango 2, ma stavolta anche la matrice completa

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

ha rango 2. Infatti tutti i minori 3×3 di A' hanno determinante nullo. Quindi il sistema è compatibile e il suo insieme di soluzioni $\mathcal{S}$ verifica

$$\dim(\mathcal{S}) = 3 - rango(A) = 1$$

Siamo quindi nel caso richiesto, e per ottenere esplicitamente le soluzioni riduciamo A' a scala. Si trova che

$$A' \quad \sim \quad S' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

e quindi risolviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo che l'insieme delle soluzioni $\mathcal{S}$ nel caso $k = 0$ è il sottospazio affine

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

- **<u>Esercizio 5</u>** *Dire se le seguenti matrici sono triangolabili su $\mathbb{R}$, e rispetto a quale base:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ -6 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo studiare per ogni matrice quali sono gli autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

Scriviamo il polinomio caratteristico di A_1

$$p_{A_1}(t) = \det(A_1 - tI) = -(t^3 + t^2 + 4t + 4) = -(t+1)(t^2 + 4)$$

Quindi troviamo che A_1 ha solo un autovalore reale $\{-1\}$ con molteplicità algebrica $m_{-1} = 1 < 3$. Dunque non è triangolabile su $\mathbb{R}$.

Scriviamo il polinomio caratteristico di A_2

$$p_{A_2}(t) = \det(A_2 - tI) = -(t^3 - 3t^2) = -t^2(t-3)$$

Quindi troviamo che A_2 ha autovalori reali $\{0, 3\}$ con molteplicità algebriche $m_0 = 2$ e $m_3 = 1$. Dunque, poiché $m_0 + m_3 = 3$, la matrice A_2 è triangolabile su $\mathbb{R}$. Per trovare una base dobbiamo calcolare le molteplicità geometriche. Si trova

$$g_0 = \dim \ker(A_2) = 3 - \text{rango}(A_2) = 1$$

$$g_3 = \dim\ker(A_2 - 3I) = \dim\ker\begin{pmatrix} -7 & 5 & 2 \\ -6 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

anche se per l'autovalore 3, poiché $m_3 = 1$, si può subito concludere che $g_3 = m_3 = 1$. Quindi poiché $g_0 < m_0$, $g_3 = m_3$, si conclude che la matrice A_2 è triangolabile ma non diagonalizzabile.

La base $\mathcal{C}$ che la rende triangolare avrà un autovettore relativo all'autovalore 0, dato da

$$A_2 v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

e un vettore che si trova cercando una soluzione di

$$A_2 w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{ad esempio} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In più avrà un autovettore relativo all'autovalore 3, dato da

$$(A_2 - 3I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Quindi

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Infine per quanto riguarda A_3 notiamo che è già in forma triangolare rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.