Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito A del 26-06-2018

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y+x^2-y^2}{x^2-y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare il suo dominio naturale;

ii) studiarne la continuità;

iii) determinare massimo e minimo di f su Ω dato dal triangolo di vertici $S_1 = (1,0)$, $S_2 = (2,1)$ e $S_3 = (2,-1)$.

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\, e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\,,\, x \geq 0\,,\, 1 \leq y \leq \frac{3}{2}\right\}$.

Esercizio 3. (8 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x\sqrt{x^2+y^2}\,\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)-y}{x^2+y^2} \\ \frac{y\sqrt{x^2+y^2}\,\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

i) dire se è conservativo sul suo dominio naturale;

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva (γ, I), con $I = [\pi, 3\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [\pi, 3\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(t\,,\,\sin t\right)$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y+x^2-y^2}{x^2-y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i) determinare il suo dominio naturale;

La funzione è definita come $f_1(x,y)=\frac{x^3y+x^2-y^2}{x^2-y^2}$ su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, e come $f_2(0,0)=1$ su $\{(0,0)\}$.

Il dominio naturale di f_1 è $X_1=\mathbb{R}^2\setminus\{y=\pm x\}$, mentre il dominio naturale di f_2 è $X_2=\{(0,0)\}$. Dunque il dominio naturale di f è $X=(\mathbb{R}^2\setminus\{y=\pm x\})\cup\{(0,0)\}$.

ii) studiarne la continuità;

Essendo le funzioni f_1 e f_2 composizione di funzioni continue, la funzione f è sicuramente continua in tutti i punti del suo dominio naturale diversi da $\bar{X}_1\cap\bar{X}_2=\{(0,0)\}$. Rimane quindi da studiare la continuità di f in $(0,0)$, e dobbiamo stabilire se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=1\,.$$

Iniziamo a studiare il comportamento lungo le rette della forma $y=\lambda x$ con $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y+x^2-y^2}{x^2-y^2}=\lim_{x\to0}\frac{\lambda x^4+x^2-\lambda^2x^2}{x^2-\lambda^2x^2}=1\qquad\forall\,\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}\,.$$

Lo stesso vale restringendoci all'asse y, ossia ponendo $x=0$. Consideriamo poi il limite lungo le curve del tipo $y=x^\alpha$ con $\alpha>0$ e $\alpha\neq1$. Si trova

$$\lim_{y=x^\alpha,\,(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y+x^2-y^2}{x^2-y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^{3+\alpha}+x^2-x^{2\alpha}}{x^2-x^{2\alpha}}=\begin{cases}\lim_{x\to0}1+\frac{x^{3+\alpha}}{x^2+o(x^2)}=1\,, & \text{se } \alpha>1\\ \lim_{x\to0}1+\frac{x^{3+\alpha}}{-x^{2\alpha}+o(x^{2\alpha})}=1\,, & \text{se } \alpha\in(0,1)\end{cases}$$

Come ultima direzione consigliata per lo studio del limite, scegliamo le curve "tangenti" a una delle direzioni che annullano il denominatore, $y=\pm x$. Poniamo per esempio $y=x+x^\beta$, con $\beta>1$. Si trova

$$\lim_{y=x+x^\beta,\,(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y+x^2-y^2}{x^2-y^2}=\lim_{x\to0}1+\frac{x^4+x^{3+\beta}}{x^2-(x+x^\beta)^2}=\lim_{x\to0}1+\frac{x^4+o(x^4)}{-2x^{1+\beta}+o(x^{1+\beta})}\neq1\quad\text{per } \beta\geq3\,.$$

Abbiamo dunque dimostrato che il limite non esiste, e quindi la funzione f non è continua in $\{(0,0)\}$.

iii) determinare massimo e minimo di f su Ω dato dal triangolo di vertici $S_1=(1,0)$, $S_2=(2,1)$ e $S_3=(2,-1)$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

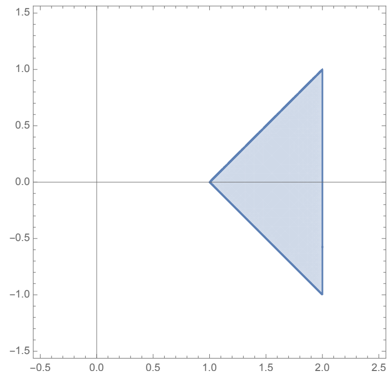

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

L'insieme Ω è interamente contenuto nella parte interna del dominio naturale X_1 della funzione f_1 che definisce f. La funzione f_1 è un rapporto di polinomi, e dunque è differenziabile in tutto Ω. Possiamo quindi calcolare il gradiente su Ω

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2y(x^2-3y^2)}{(x^2-y^2)^2} \\ \\ \frac{x^3(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} \end{pmatrix}$$

da cui si ricava che i punti critici soddisfano $x = 0$, e quindi non ci sono punti critici liberi in Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

La funzione f è differenziabile su tutto il bordo per quanto visto prima. Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \{y = x - 1\,,\, 1 \le x \le 2\}$$

$$\Gamma_2 = \{x = 2\,,\, -1 \le y \le 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{y = 1 - x\,,\, 1 \le x \le 2\}\ .$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\, t-1)\,, \qquad t \in [1,2]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 1 + \frac{t^4 - t^3}{2t-1}\,, \qquad t \in [1,2]\ .$$

Risulta $g_1'(t) = \frac{t^2(6t^2-8t+3))}{(2t-1)^2}$, dunque non ci sono punti critici in $(1,2)$.

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (2\,,\,t)\,, \qquad t \in [-1,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 1 + \frac{8t}{4-t^2}\,, \qquad t \in [1,2]\ .$$

Risulta $g_2'(t) = \frac{8(t^2+4)}{(4-t^2)^2}$, dunque non ci sono punti critici.

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\,1-t)\,, \qquad t \in [1,2]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = 1 + \frac{t^3-t^4}{2t-1}\,, \qquad t \in [1,2]\ .$$

Risulta $g_1'(t) = -\frac{t^2(6t^2-8t+3))}{(2t-1)^2}$, dunque non ci sono punti critici in $(1,2)$. I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = 1\,, \quad f(S_2) = \frac{11}{3}\,, \quad f(S_3) = -\frac{5}{3}\,.$$

Dunque il massimo di f è $\frac{11}{3}$ e il minimo è $-\frac{5}{3}$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\ e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x^2+y^2 \le 9\,,\ x\ge 0\,,\ 1\le y\le \frac{3}{2}\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

È possibile svolgere l'integrale applicando le formule di riduzione, vedendo Ω come insieme semplice rispetto alla x ma l'integrale non è agevole, oppure usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Svolgiamolo con il cambiamento di variabili. Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\ e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ dx\,dy = \iint_S \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\ e^\rho\,d\rho\,d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi]\ :\ 1\le\rho^2\le 9\,,\ \rho\cos\theta\ge 0\,,\ 1\le\rho\sin\theta\le\frac{3}{2}\right\}$$

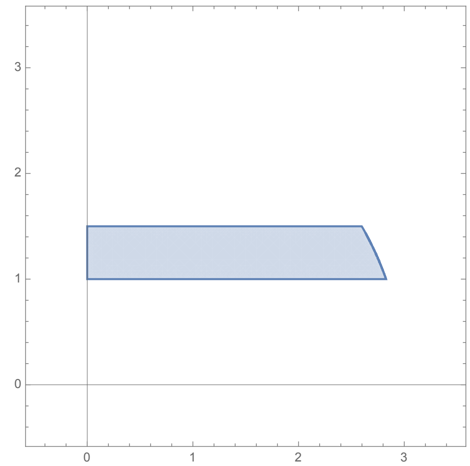

Figure 2: L'insieme Ω.

Le prime due condizioni, e l'informazione $\rho \sin\theta > 0$ che si ricava dalla terza condizione, ci dicono che

$$\rho \in [1,3] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] .$$

La terza condizione per S si riscrive invece, osservando che $\sin\theta > 0$ per ogni $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, come

$$\frac{1}{\sin\theta} \leq \rho \leq \frac{3}{2\sin\theta} .$$

L'insieme S è quindi quello rappresentato in figura 3 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per

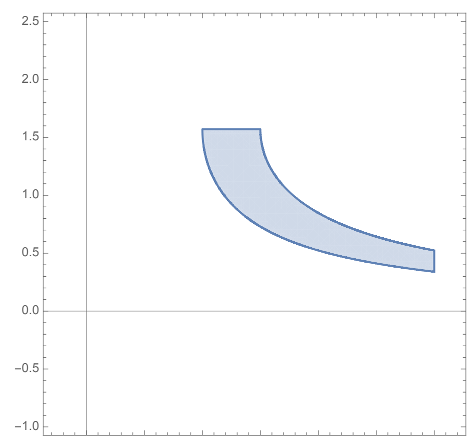

Figure 3: L'insieme S.

scriverlo come insieme semplice dobbiamo considerare la soluzione in $[0, \frac{\pi}{2}]$ di

$$\frac{1}{\sin\theta} = 3$$

che è $\theta_1 = \arcsin\frac{1}{3}$, e la soluzione in $[0, \frac{\pi}{2}]$ di

$$\frac{3}{2\,\sin\theta} = 3$$

che è $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$.

Possiamo dunque scrivere S come unione di due insiemi semplici,

$$S = \left\{(\rho,\theta)\,:\,\theta_1 \le \theta \le \frac{\pi}{6}\,,\,\frac{1}{\sin\theta} \le \rho \le 3\right\} \quad \bigcup \quad \left\{(\rho,\theta)\,:\,\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,,\,\frac{1}{\sin\theta} \le \rho \le \frac{3}{2\,\sin\theta}\right\}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\,e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_S \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,e^\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{3} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,e^\rho\,d\rho\right)d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{\frac{3}{2\,\sin\theta}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,e^\rho\,d\rho\right)d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\left(e^3 - e^{\frac{1}{\sin\theta}}\right)d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\left(e^{\frac{3}{2\,\sin\theta}} - e^{\frac{1}{\sin\theta}}\right)d\theta =$$

$$= \left(-\frac{e^3}{\sin\theta}\right)\Big|_{\theta_1}^{\frac{\pi}{6}} + e^{\frac{1}{\sin\theta}}\Big|_{\theta_1}^{\frac{\pi}{6}} + \left(-\frac{2}{3}\,e^{\frac{3}{2\,\sin\theta}}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{1}{\sin\theta}}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\,e^3 - \frac{2}{3}\,e^{\frac{3}{2}} + e\,.$$

Esercizio 3. *Dato il campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x\,\sqrt{x^2+y^2}\,\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - y}{x^2+y^2} \\ \\ \frac{y\,\sqrt{x^2+y^2}\,\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

i) dire se è conservativo sul suo dominio naturale;

Il dominio naturale del campo è l'insieme aperto e connesso $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per dire se il campo è conservativo su X, studiamo innanzitutto se è irrotazionale. Troviamo

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y\,\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= y\,\frac{-x\,\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\,\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= x\,\frac{-y\,\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

e dunque

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

Il dominio naturale X non è semplicemente connesso, e dunque per determinare se $\mathbf{F}$ è conservativo su X dobbiamo calcolare il lavoro del campo lungo una curva chiusa che racchiuda il punto $\{(0,0)\}$. Definiamo la curva $(\bar{\gamma}, I)$ con $I = [0, 2\pi]$ e

$$\bar{\gamma}(t) = (\cos t\,,\, \sin t)$$

Si trova allora che

$$L(\mathbf{F}, \bar{\gamma}) = \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} \cos 1\, \cos t - \sin t \\ \cos 1\, \sin t + \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} > dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

Essendo il lavoro non nullo, il campo $\mathbf{F}$ non è conservativo su X.

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva (γ, I), con $I = [\pi, 3\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [\pi, 3\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(t\,,\, \sin t\right)$$

Studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva è di classe C^1, e non è chiusa, essendo $\gamma(\pi) = (\pi, 0) \neq \gamma(3\pi) = (3\pi, 0)$, e il sostegno disegnato in figura 4 è contenuto interamente nel dominio del campo, e in particolare nell'insieme $\Omega = \{x > 0\}$. Per il calcolo del lavoro possiamo

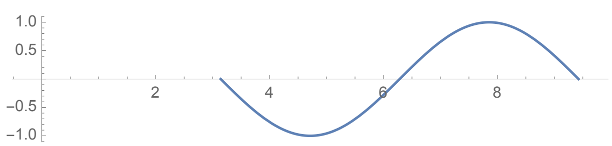

Figure 4: Il sostegno della curva (γ, I).

considerare il campo $\mathbf{F}$ ristretto all'insieme Ω, che è semplicemente connesso. Essendo il campo irrotazionale, il Lemma di Poincaré implica che $\mathbf{F}$ è conservativo su Ω. Possiamo quindi definire una curva $\tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1, con sostegno contenuto in Ω e con punto iniziale in $(\pi, 0)$ e punto finale in $(3\pi, 0)$, e usare che $L(\mathbf{F}, \gamma) = L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma})$. Un esempio è la curva

$$\tilde{\gamma} : [\pi, 3\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(t\,,\, 0\right)$$

per la quale si trova

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = \int_\pi^{3\pi} < \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > dt = \int_\pi^{3\pi} \cos t\, dt = 0\,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito B del 26-06-2018

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3+2x^2-2y^2}{x^2-y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare il suo dominio naturale;

ii) studiarne la continuità;

iii) determinare massimo e minimo di f su Ω dato dal triangolo di vertici $S_1 = (0,1)$, $S_2 = (1,2)$ e $S_3 = (-1,2)$.

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2}\, e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\,,\, y \geq 0\,,\, \frac{3}{2} \leq x \leq 2\right\}$.

Esercizio 3. (8 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)-y}{x^2+y^2} \\ \\ \frac{y\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

i) dire se è conservativo sul suo dominio naturale;

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva (γ, I), con $I = [2\pi, 3\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [2\pi, 3\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t\,,\, \sin t\Big)$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3+2x^2-2y^2}{x^2-y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i) determinare il suo dominio naturale;

La funzione è definita come $f_1(x,y)=\frac{xy^3+2x^2-2y^2}{x^2-y^2}$ su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, e come $f_2(0,0)=2$ su $\{(0,0)\}$.

Il dominio naturale di f_1 è $X_1=\mathbb{R}^2\setminus\{y=\pm x\}$, mentre il dominio naturale di f_2 è $X_2=\{(0,0)\}$. Dunque il dominio naturale di f è $X=(\mathbb{R}^2\setminus\{y=\pm x\})\cup\{(0,0)\}$.

ii) studiarne la continuità;

Essendo le funzioni f_1 e f_2 composizione di funzioni continue, la funzione f è sicuramente continua in tutti i punti del suo dominio naturale diversi da $\bar{X}_1\cap\bar{X}_2=\{(0,0)\}$. Rimane quindi da studiare la continuità di f in $(0,0)$, e dobbiamo stabilire se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=2\,.$$

Iniziamo a studiare il comportamento lungo le rette della forma $y=\lambda x$ con $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3+2x^2-2y^2}{x^2-y^2}=\lim_{x\to0}\frac{\lambda x^4+2x^2-2\lambda^2x^2}{x^2-\lambda^2x^2}=2\qquad\forall\,\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}\,.$$

Lo stesso vale restringendoci all'asse y, ossia ponendo $x=0$. Consideriamo poi il limite lungo le curve del tipo $y=x^\alpha$ con $\alpha>0$ e $\alpha\neq1$. Si trova

$$\lim_{y=x^\alpha,\,(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3+2x^2-2y^2}{x^2-y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^{1+3\alpha}+2x^2-2x^{2\alpha}}{x^2-x^{2\alpha}}=\begin{cases}\lim_{x\to0}2+\frac{x^{1+3\alpha}}{x^2+o(x^2)}=2\,, & \text{se }\alpha>1\\ \lim_{x\to0}2+\frac{x^{1+3\alpha}}{-x^{2\alpha}+o(x^{2\alpha})}=2\,, & \text{se }\alpha\in(0,1)\end{cases}$$

Come ultima direzione consigliata per lo studio del limite, scegliamo le curve "tangenti" a una delle direzioni che annullano il denominatore, $y=\pm x$. Poniamo per esempio $y=x+x^\beta$, con $\beta>1$. Si trova

$$\lim_{y=x+x^\beta,\,(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3+2x^2-2y^2}{x^2-y^2}=\lim_{x\to0}2+\frac{x(x+x^\beta)^3}{x^2-(x+x^\beta)^2}=\lim_{x\to0}2+\frac{x^4+o(x^4)}{-2x^{1+\beta}+o(x^{1+\beta})}\neq2\quad\text{per }\beta\geq3\,.$$

Abbiamo dunque dimostrato che il limite non esiste, e quindi la funzione f non è continua in $\{(0,0)\}$.

iii) determinare massimo e minimo di f su Ω dato dal triangolo di vertici $S_1=(0,1)$, $S_2=(1,2)$ e $S_3=(-1,2)$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 5.

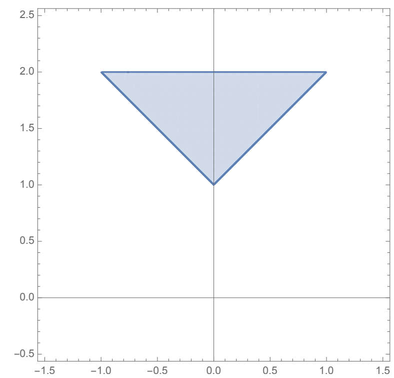

Figure 5: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

L'insieme Ω è interamente contenuto nella parte interna del dominio naturale X_1 della funzione f_1 che definisce f. La funzione f_1 è un rapporto di polinomi, e dunque è differenziabile in tutto Ω. Possiamo quindi calcolare il gradiente su Ω

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y^3(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} \\ \\ \frac{xy^2(3x^2-y^2)}{(x^2-y^2)^2} \end{pmatrix}$$

da cui si ricava che i punti critici soddisfano $y = 0$, e quindi non ci sono punti critici liberi in Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

La funzione f è differenziabile su tutto il bordo per quanto visto prima. Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \{y = x + 1\,,\ 0 \le x \le 1\}$$

$$\Gamma_2 = \{y = 2\,,\ -1 \le x \le 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{y = 1 - x\,,\ -1 \le x \le 0\}\ .$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\, t+1)\,, \qquad t \in [0,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 2 - \frac{t(1+t)^3}{2t+1}\,, \qquad t \in [1,2]\ .$$

Risulta $g_1'(t) = -\frac{(1+t)^2(6t^2+4t+1)}{(2t+1)^2}$, dunque non ci sono punti critici in $(0,1)$.

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (t\,,\,2)\,, \qquad t \in [-1,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 2 + \frac{8t}{t^2-4}\,, \qquad t \in [1,2]\ .$$

Risulta $g_2'(t) = -\frac{8(t^2+4)}{(t^2-4)^2}$, dunque non ci sono punti critici.

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\,1-t)\,, \qquad t \in [-1,0]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = 2 + \frac{t(1-t)^3}{2t-1}\,, \qquad t \in [1,2]\ .$$

Risulta $g_1'(t) = -\frac{(1-t)^2(6t^2-4t+1)}{(2t-1)^2}$, dunque non ci sono punti critici in $(-1,0)$. I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = 2\,, \quad f(S_2) = -\frac{2}{3}\,, \quad f(S_3) = \frac{14}{3}\,.$$

Dunque il massimo di f è $\frac{14}{3}$ e il minimo è $-\frac{2}{3}$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2}\ e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x^2+y^2 \le 9\,,\ y \ge 0\,,\ \frac{3}{2} \le x \le 2\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 6.

È possibile svolgere l'integrale applicando le formule di riduzione, vedendo Ω come insieme semplice rispetto alla y ma l'integrale non è agevole, oppure usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Svolgiamolo con il cambiamento di variabili. Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2}\ e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ dx\,dy = \iint_S \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\ e^\rho\,d\rho\,d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty)\times[-\pi,\pi]\ :\ 1 \le \rho^2 \le 9\,,\ \rho\sin\theta \ge 0\,,\ \frac{3}{2} \le \rho\cos\theta \le 2\right\}$$

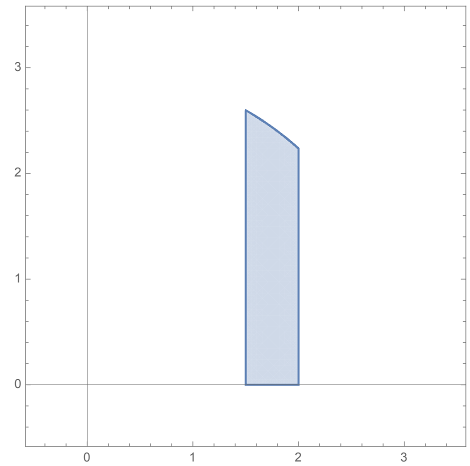

Figure 6: L'insieme Ω.

Le prime due condizioni, e l'informazione $\rho\cos\theta > 0$ che si ricava dalla terza condizione, ci dicono che

$$\rho \in [1,3] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

La terza condizione per S si riscrive invece, osservando che $\cos\theta > 0$ per ogni $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, come

$$\frac{3}{2\cos\theta} \le \rho \le \frac{2}{\cos\theta}.$$

L'insieme S è quindi quello rappresentato in figura 7 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per

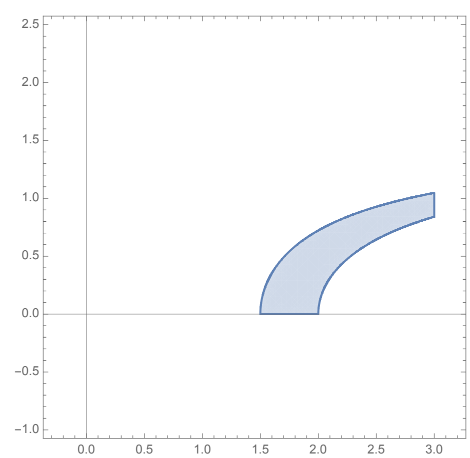

Figure 7: L'insieme S.

scriverlo come insieme semplice dobbiamo considerare la soluzione in $[0, \frac{\pi}{2}]$ di

$$\frac{2}{\cos\theta} = 3$$

che è $\theta_1 = \arccos \frac{2}{3}$, e la soluzione in $[0, \frac{\pi}{2}]$ di

$$\frac{3}{2\,\cos\theta} = 3$$

che è $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$.

Possiamo dunque scrivere S come unione di due insiemi semplici,

$$S = \left\{(\rho,\theta)\,:\,0 \le \theta \le \theta_1\,,\,\frac{3}{2\,\cos\theta} \le \rho \le \frac{2}{\cos\theta}\right\} \quad \bigcup \quad \left\{(\rho,\theta)\,:\,\theta_1 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\,,\,\frac{3}{2\,\cos\theta} \le \rho \le 3\right\}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2}\,e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_S \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,e^\rho\,d\rho\,d\theta =$$
$$= \int_0^{\theta_1}\left(\int_{\frac{3}{2\,\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,e^\rho\,d\rho\right)d\theta + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_{\frac{3}{2\,\cos\theta}}^{3} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,e^\rho\,d\rho\right)d\theta =$$
$$= \int_0^{\theta_1} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\left(e^{\frac{2}{\cos\theta}} - e^{\frac{3}{2\,\cos\theta}}\right)d\theta + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\left(e^3 - e^{\frac{3}{2\,\cos\theta}}\right)d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\,e^{\frac{2}{\cos\theta}}\Big|_0^{\theta_1} - \frac{2}{3}\,e^{\frac{3}{2\,\cos\theta}}\Big|_0^{\theta_1} + \frac{e^3}{\cos\theta}\Big|_{\theta_1}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{2}{3}\,e^{\frac{3}{2\,\cos\theta}}\Big|_{\theta_1}^{\frac{\pi}{3}} =$$
$$= \frac{1}{3}\,e^3 + \frac{2}{3}\,e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\,e^2\,.$$

Esercizio 3. *Dato il campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x\,\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - y}{x^2+y^2} \\ \\ \frac{y\,\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

i) dire se è conservativo sul suo dominio naturale;

Il dominio naturale del campo è l'insieme aperto e connesso $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per dire se il campo è conservativo su X, studiamo innanzitutto se è irrotazionale. Troviamo

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y\,\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= y\,\frac{x\,\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\,\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= x\,\frac{y\,\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

e dunque

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

Il dominio naturale X non è semplicemente connesso, e dunque per determinare se $\mathbf{F}$ è conservativo su X dobbiamo calcolare il lavoro del campo lungo una curva chiusa che racchiuda il punto $\{(0,0)\}$. Definiamo la curva $(\bar{\gamma}, I)$ con $I = [0, 2\pi]$ e

$$\bar{\gamma}(t) = (\cos t\,,\, \sin t)$$

Si trova allora che

$$L(\mathbf{F}, \bar{\gamma}) = \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} \sin 1\, \cos t - \sin t \\ \sin 1\, \sin t + \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} > dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

Essendo il lavoro non nullo, il campo $\mathbf{F}$ non è conservativo su X.

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ *lungo la curva* (γ, I)*, con* $I = [2\pi, 3\pi]$ *e parametrizzazione*

$$\gamma : [2\pi, 3\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t\,,\, \sin t\Big)$$

Studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva è di classe C^1, e non è chiusa, essendo $\gamma(2\pi) = (2\pi, 0) \neq \gamma(3\pi) = (3\pi, 0)$, e il sostegno disegnato in figura 8 è contenuto interamente nel dominio del campo, e in particolare nell'insieme $\Omega = \{x > 0\}$. Per il calcolo del lavoro possiamo

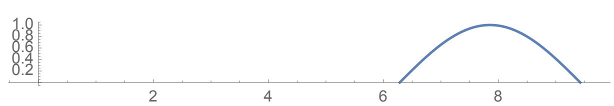

Figure 8: Il sostegno della curva (γ, I).

considerare il campo $\mathbf{F}$ ristretto all'insieme Ω, che è semplicemente connesso. Essendo il campo irrotazionale, il Lemma di Poincaré implica che $\mathbf{F}$ è conservativo su Ω. Possiamo quindi definire una curva $\tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1, con sostegno contenuto in Ω e con punto iniziale in $(2\pi, 0)$ e punto finale in $(3\pi, 0)$, e usare che $L(\mathbf{F}, \gamma) = L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma})$. Un esempio è la curva

$$\tilde{\gamma} : [2\pi, 3\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t\,,\, 0\Big)$$

per la quale si trova

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = \int_{2\pi}^{3\pi} < \begin{pmatrix} \sin t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > dt = \int_{2\pi}^{3\pi} \sin t\, dt = 2\,.$$