Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Test del 26-01-2021

Esercizio 1 (1 punto). Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\ \log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

quale affermazione è falsa?

- la funzione è continua su tutto il suo dominio;
- la funzione è differenziabile su tutto il suo dominio;
- la funzione ha un punto critico in $(0,0)$;
- la funzione ha un punto di minimo assoluto in $(0,0)$;
- la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2 (3 punti). Dati

$$f(x,y) = 5x + 2y$$
$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x + y \geq 0\,,\ 5x^2 + y^2 \leq 9\right\}$$

determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su Ω.

Esercizio 3 (3 punti). Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega 2\sqrt{2-y}\,dx\,dy$$

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\ 0 \leq y \leq 1\,,\ y \leq 2 - x^2\right\}$$

Esercizio 4 (3 punti). Dati il campo di vettori $\mathbf{F}$ e la curva $(\gamma, [0,2])$ seguenti

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + e^{(y^2)} \end{pmatrix}$$

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) = \Big((1+t)\cos(\pi t)\,,\ (1+t)\sin(\pi t)\Big)$$

calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $(\gamma, [0,2])$.

Risposte

Esercizio 1. La funzione $f(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, e si scrive su tutto il suo dominio come prodotto di due funzioni continue, essendo composizioni di funzioni continue. Quindi f è continua su tutto il suo dominio. Inoltre usando lo stesso ragionamento, la funzione f è sicuramente differenziabile su $R^2 \setminus \{(0,0)\}$, e resta da capire se è differenziabile anche su $(0,0)$.

Possiamo intanto osservare che $f(0,0) = 0$ e che $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, quindi $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto.

Studiamo ora la differenziabilità di f in $(0,0)$. Calcolando le derivate parziali otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t| \log(1+|t|)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t| \log(1+|t|)}{t} = 0$$

dove abbiamo usato il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+|t|)}{t} = 1$. Infine

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}\;\log(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

e quindi f è differenziabile in $(0,0)$, e inoltre essendo nulle le due derivate parziali, $(0,0)$ è un punto critico.

L'affermazione falsa è dunque che f non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

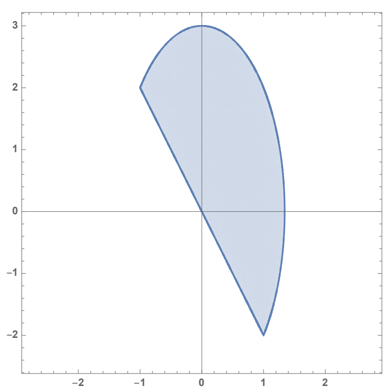

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

La funzione f è un polinomio con dominio naturale $\mathbb{R}^2$, e quindi è differenziabile su $\mathbb{R}^2$, e per calcolare le derivate parziali possiamo applicare le usuali regole di derivazione in ogni punto. Poiché

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

non ci sono punti critici liberi.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di Ω. Gli spigoli sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

e dunque sono i punti

$$S_1 = (1\,,\,-2) \quad \text{e} \quad S_2 = (-1\,,\,2)\ .$$

Dividiamo poi il bordo in due parti

$$\Gamma_1 = \{2x + y = 0\,,\,-1 \le x \le 1\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{5x^2 + y^2 = 9\,,\,2x + y \ge 0\right\}$$

In entrambi i casi usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Per Γ_1 usiamo la funzione $G_1 = 2x + y$ e quindi cerchiamo le soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda\,\nabla G_1(x,y) \\ G_1(x,y) = 0 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5 = \lambda\,2 \\ 2 = \lambda\,1 \\ 2x + y = 0 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ottiene $\lambda = \frac{5}{2}$ e $\lambda = 2$, e quindi non ci sono soluzioni.

Per Γ_2 usiamo la funzione $G_2 = 5x^2 + y^2$ e quindi cerchiamo le soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda\,\nabla G_2(x,y) \\ G_2(x,y) = 9 \\ 2x + y \ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5 = \lambda\,10x \\ 2 = \lambda\,2y \\ 5x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + y \ge 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni segue $2x = y$, che nella terza equazione e con la condizione $2x + y \ge 0$, restituisce la soluzione $(x, y, \lambda) = (1, 2, \frac{1}{2})$. Otteniamo quindi il punto critico vincolato

$$Q_1 = (1\,,\,2)\,.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = 1\,, \quad f(S_2) = -1\,, \quad f(Q_1) = 9\,.$$

Quindi il massimo di f è 9 e il minimo è -1.

Esercizio 3. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

Scriviamo Ω come insieme semplice rispetto a x in quanto sembra più agevole il calcolo. Troviamo

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \le y \le 1\,,\,0 \le x \le \sqrt{2-y}\right\}$$

e quindi

$$\iint_\Omega 2\,\sqrt{2-y}\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{2-y}} 2\,\sqrt{2-y}\,dx \Big)\,dy = \int_0^1 2\,\sqrt{2-y}\,\Big(x\Big|_0^{\sqrt{2-y}} \Big)\,dy =$$

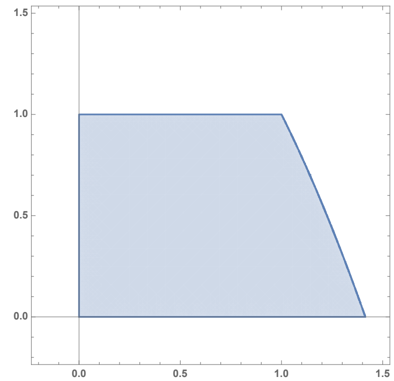

Figure 2: L'insieme Ω.

$$= \int_0^1 2\,(2-y)\,dy = \Big(4y - y^2\Big)\Big|_0^1 = 3\,.$$

Esercizio 4. Il campo di vettori $\mathbf{F}$ è definito su $\mathbb{R}^2$ ed è irrotazionale, infatti

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 - 1 = 0\,.$$

Quindi il campo è conservativo perché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso.

La curva è una spirale con punto iniziale $\gamma(0) = (1,0)$ e punto finale $\gamma(2) = (3,0)$. Per calcolare il lavoro possiamo dunque utilizzare una curva $(\tilde{\gamma}, I)$ con lo stesso punto iniziale e finale. Ad esempio possiamo scegliere

$$\tilde{\gamma} : [1,3] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \tilde{\gamma}(t) = \Big((t\,,\,0\Big)$$

e per il fatto che il campo è conservativo segue che

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_1^3 \ < \mathbf{F}(\tilde{\gamma}(t))\,,\,\tilde{\gamma}'(t) > \ dt = \int_1^3 \ < \begin{pmatrix} 2t \\ t+1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > \ dt = \int_1^3 2t\,dt = (t^2)|_1^3 = 8\,.$$

Per calcolare il lavoro possiamo anche trovare un potenziale $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ del campo. Per farlo dobbiamo trovare una soluzione di

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{F}(x,y) \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + e^{(y^2)} \end{cases} \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Dalla prima equazione si ricava che f deve essere della forma

$$f(x,y) = x^2 + xy + c(y)$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo dalla variabile y. Sostituendo questa espressione per f nella seconda equazione si trova

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2 + xy + c(y)\Big) = x + e^{(y^2)} \qquad \Leftrightarrow \qquad c'(y) = e^{(y^2)}$$

quindi $c(y)$ è una primitiva di $e^{(y^2)}$. È noto che le primitive di $e^{(y^2)}$ non si possono esprimere in termini di funzioni elementari, dunque non esplicitiamo la $c(y)$, e un potenziale del campo è dunque una funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy + c(y)\,, \qquad \text{con } c(y) = \int e^{(y^2)}\,dy\,.$$

Possiamo allora calcolare il lavoro tramite la formula valida per campi conservativi

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = f(\gamma(2)) - f(\gamma(0)) = f(3,0) - f(1,0) = 9 + c(0) - 1 - c(0) = 8\,.$$