Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 26-01-2013

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \arctan\sqrt{x^2+y^2}$$

i) determinarne il dominio e i punti di differenziabilità;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$$

Esercizio 2. (10 punti) Data la curva chiusa (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\sin(t),\, \cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t)\right)$$

i) determinare in quali punti esiste la retta tangente al sostegno della curva;

ii) calcolare l'area della parte interna al sostegno della curva (*Sugg: si potrebbe usare il Teorema del Rotore*).

Esercizio 3. (14 punti) Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ \sqrt{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \leq u^2+v^2 \leq 9\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(4,\ 0,\ 2\sqrt{2}\right)$;

ii) calcolare l'area del sottoinsieme di Σ dato da $\sigma(U)$ dove

$$U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; u \geq 0,\ v \geq 0,\ 1 \leq u^2+v^2 \leq 9,\ \frac{1}{2}u^2 \leq v \leq u\right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \arctan \sqrt{x^2+y^2}$$

i) determinarne il dominio e i punti di differenziabilità;

La funzione ha come dominio l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \geq 0\right\} = \mathbb{R}^2$$

e si può scrivere come $f(x,y) = g(h(x,y))$, la composizione delle funzioni

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad g(t) = \arctan t$$

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

La funzione g è derivabile su $\mathbb{R}$, mentre la funzione h è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Quindi certamente f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Resta da determinare se f è differenziabile anche in $(0,0)$. Controlliamo innanzitutto se esistono le derivate parziali nell'origine. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\arctan\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\arctan|t|}{t}$$

e l'ultimo limite non esiste. Quindi f non è differenziabile in $(0,0)$, e l'insieme $\mathrm{Diff}(f)$ dei punti differenziabilità di f è

$$\mathrm{Diff}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\ .$$

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$$

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su D dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f è non differenziabile in $(0,0)$ e si verifica che $(0,0) \in D$, quindi

$$P_1 = (0,0)$$

è un punto da tenere in considerazione. Il bordo di D non ha invece spigoli.

Passiamo a studiare l'esistenza di punti critici liberi e vincolati. I punti critici liberi sono l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathrm{Diff}(f) \ : \ \nabla f(x,y) = 0\}$$

dato quindi dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Si verifica che questo sistema non ha soluzioni, e quindi non esistono punti critici liberi.

Studiamo quindi il comportamento di f sul bordo di D, che consiste dell'ellisse $\Gamma = \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$. Per studiare la funzione vincolata a Γ utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Dobbiamo quindi cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \frac{x}{2} \\ \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \frac{2y}{9} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \frac{2y}{9} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{2} \\ \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \frac{2y}{9} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

e quindi a

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = \frac{3}{20} \\ y = \pm 3 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x \neq 0 \\ \lambda = \frac{2}{1+x^2+y^2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y = \frac{4}{9}\,y \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

e infine

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = \frac{3}{20} \\ y = \pm 3 \end{cases} \bigcup \begin{cases} \lambda = \frac{1}{5} \\ y = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

I punti critici vincolati sono quindi

$$Q_1 = (0,\,3)\ ,\ Q_2 = (0,\,-3)\ ,\ Q_3 = (2,\,0)\ ,\ Q_4 = (-2,\,0)$$

Quindi dobbiamo confrontare i valori

$$f(P_1) = 0$$

$$f(Q_1) = f(Q_2) = \arctan 3\,, \quad f(Q_3) = f(Q_4) = \arctan 2$$

Quindi

$$\max_D f = \arctan 3\,, \qquad \min_D f = 0$$

Esercizio 2. *Data la curva chiusa (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 , \qquad \gamma(t) = \left(\sin(t),\, \cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t) \right)$$

i) determinare in quali punti esiste la retta tangente al sostegno della curva;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in I$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. Abbiamo

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -2\sin(t)\,\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\gamma'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos(t) = 0 \\ -2\sin(t)\,\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos(t) = 0 \\ \sin(t) = 0 \end{cases}$$

Allora $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, e la curva ammette retta tangente al suo sostegno in tutti i punti.

ii) calcolare l'area della parte interna al sostegno della curva (Sugg: si potrebbe usare il Teorema del Rotore).

Sia U la parte interna alla curva (γ, I), che è chiusa e di classe C^1, ed è orientata negativamente. Possiamo allora scrivere che

$$Area(U) = \iint_U 1\,dxdy = \iint_U rot(\mathbf{F})\,dxdy = -L(\mathbf{F}, \gamma)$$

per un campo di vettori $\mathbf{F}(x, y)$ definito su tutto $\mathbb{R}^2$ e che soddisfi $rot(\mathbf{F}) = 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Poniamo quindi

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

e si trova

$$Area(U) = -L(\mathbf{F}, \gamma) = -\int_0^{2\pi} -\left(\cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t) \right) \cos(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos(t) - \sin^2(t)\cos(t) + \frac{1}{2}\cos^2(t) \right) dt = \left(\sin(t) - \frac{1}{3}\sin^3(t) + \frac{t + \sin(t)\cos(t)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 3. *Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione*

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 , \qquad \sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ \sqrt{u^2 + v^2} \end{pmatrix}$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le u^2 + v^2 \le 9\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(4,\ 0,\ 2\sqrt{2}\right)$;

Dobbiamo trovare il vettore normale a Σ nel punto P, che si ottiene come $P = \sigma(2,\ 2)$. Scriviamo quindi innanzitutto la matrice Jacobiana di σ da cui otteniamo il vettore normale come prodotto vettoriale tra le due colonne. Troviamo

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{u+v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ \frac{u-v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi $\vec{n}(2,\ 2)$, che è

$$\vec{n}(2,\ 2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è

$$\sqrt{2}(x-4) - 2\left(z - 2\sqrt{2}\right) = 0$$

che è equivalente a

$$\sqrt{2}x - 2z = 0\,.$$

ii) calcolare l'area del sottoinsieme di Σ dato da $\sigma(U)$ dove

$$U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u \ge 0,\ v \ge 0,\ 1 \le u^2 + v^2 \le 9,\ \frac{1}{2}u^2 \le v \le u\right\}$$

Applicando la formula per l'area di una superficie parametrizzata, dobbiamo calcolare l'integrale

$$\text{Area}(\sigma(U)) = \iint_U \|\vec{n}(u,v)\|\, dudv$$

Dal punto i) troviamo che

$$\|\vec{n}(u,v)\| = \sqrt{\left(\frac{u+v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{(u+v)^2 + (u-v)^2}{u^2+v^2} + 4} = \sqrt{6}$$

Inoltre per calcolare l'integrale usiamo la formula di cambiamento di variabili con $u = \rho\cos\phi$ e $v = \rho\sin\phi$, da cui l'insieme U si riscrive come

$$\tilde{U} = \left\{(\rho,\phi) \in (0,+\infty) \times (0,2\pi) \ : \ \cos\phi \ge 0,\ \sin\phi \ge 0,\ 1 \le \rho \le 3,\ \frac{1}{2}\rho\cos^2\phi \le \sin\phi \le \cos\phi\right\} =$$

$$= \left\{(\rho,\phi) \ : \ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ 1 \le \rho \le 3,\ \rho \le 2\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi},\ \tan\phi \le 1\right\} =$$

$$= \left\{ (\rho,\phi) \ : \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \ 1 \leq \rho \leq 3, \ \rho \leq 2\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi} \right\} =$$

$$= \left\{ (\rho,\phi) \ : \ \bar{\phi} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \ 1 \leq \rho \leq 2\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi} \right\}$$

dove $\bar{\phi} = \arcsin(\sqrt{2}-1) \in (0, \frac{\pi}{2})$. Nell'ultimo passaggio abbiamo trovato $\bar{\phi}$ come soluzione di $2\frac{\sin\bar{\phi}}{\cos^2\bar{\phi}} = 1$, e abbiamo notato che $2\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi} \leq 2$ per ogni $\phi \in (0, \frac{\pi}{4})$.

Abbiamo quindi scritto $\tilde{U}$ come insieme semplice, quindi

$$\text{Area}(\sigma(U)) = \iint_U \|\vec{n}(u,v)\| \, dudv = \iint_{\tilde{U}} \rho\sqrt{6} \ d\rho d\phi = \sqrt{6} \int_{\bar{\phi}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^{2\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi}} \rho d\rho \right) d\phi =$$

$$= \sqrt{6} \int_{\bar{\phi}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2\frac{\sin^2\phi}{\cos^4\phi} - \frac{1}{2} \right) d\phi = \sqrt{6} \int_{\bar{\phi}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2\tan^2\phi \, \frac{1}{\cos^2\phi} - \frac{1}{2} \right) d\phi = \sqrt{6} \left(\frac{2}{3}\tan^3\phi - \frac{1}{2}\phi \right) \Big|_{\bar{\phi}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sqrt{6} \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{8} - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{2}-1) \right) .$$