

Calcolo delle Probabilità e Statistica
Corso di Laurea in Informatica
Compito del 25-10-2021

Esercizio 1. (8 punti)

Una compagnia di elicotteri dispone di velivoli per giri turistici di due tipi: uno da 3 posti e uno da 5 posti. Poiché i passeggeri che prenotano poi non si presentano con una probabilità di $\frac{1}{3}$, la compagnia accetta più prenotazioni del numero di posti. Per gli elicotteri con 3 posti accetta 4 prenotazioni, mentre per quelli con 5 posti accetta 7 prenotazioni.

Supponendo che tutte le prenotazioni possibili siano state effettuate, stabilire, giustificando la risposta, per quale dei due tipi di elicottero è maggiore la probabilità che un passeggero che ha regolarmente prenotato non trovi posto.

Esercizio 2. (12 punti)

Consideriamo la funzione così definita

$$F_{\theta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ x^{\theta+1}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}, \quad \theta > 0$$

- (i) Per una variabile aleatoria con funzione di ripartizione data dalla funzione F , scrivere la densità, dire quali momenti risultano finiti e darne una formula.
- (ii) Supponendo di avere X_1, \dots, X_{90} variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite, con funzione di ripartizione data dalla funzione F di sopra per $\theta = 1$, approssimare la probabilità $\mathbf{P}\{X_1 + \dots + X_{90} \geq 55\}$.
- (iii) Considerato un campione X_1, \dots, X_{90} di variabili aleatorie indipendenti con la densità trovata al punto (i), utilizzare il metodo dei momenti per dare una stima $\tilde{\theta}$ del parametro θ sapendo che i dati forniscono una media empirica $\bar{x} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 3. (10 punti)

Un distributore di caffè dovrebbe essere tarato in maniera tale da fornire una data quantità di caffè con una deviazione standard non superiore a 2

cm^3 . L'addetto alla manutenzione non è sicuro della corretta taratura del distributore e decide di sottoporlo a test. Su un campione di 25 tazze di caffè, egli rileva una deviazione standard campionaria di $2.3 cm^3$.

- (i) Descrivere il test che è opportuno utilizzare per verificare se il distributore è tarato correttamente, e dire se il test viene superato ad un livello $\alpha = 0.1$.
- (ii) Supponendo che non cambi il numero dei dati, con quale deviazione standard campionaria il p -value diventerebbe uguale a 0.05?

Esercizio 3 per programma precedente. (10 punti)

Consideriamo la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ (parzialmente) identificata dalla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} ? & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ? & 1/2 & 0 \\ 0 & ? & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Completare la matrice di transizione inserendo le probabilità di transizione mancanti.
- (ii) Calcolare le distribuzioni di X_1 , X_2 e X_3 sapendo che $X_0 = 2$.
- (iii) Calcolare le distribuzioni invarianti.