Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Prova intermedia del 25-11-2025

Esercizio 1. (15 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 2\mu x \\ \dot{y} = 4x^2 - y \end{cases}$$

(a) Disegnare il ritratto di fase del sistema per $\mu = 1$.

(b) Disegnare il ritratto di fase del sistema per $\mu = 0$.

Esercizio 2. (15 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\mu x^3 - x^2 + x + \varepsilon(-6y^2 - 3\mu x^4 - 4x^3 + 6x^2) \end{cases}$$

al variare di $\mu \in [0, +\infty)$ e $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

(a) Per $\varepsilon = 0$, disegnare il ritratto di fase del sistema al variare di $\mu \in [0, +\infty)$.

(b) Per $\varepsilon = 0$ e $\mu \in [0, +\infty)$ si indichi con $(x_\mu(t; (x_0, y_0)), y_\mu(t; (x_0, y_0)))$ la soluzione del sistema con condizione iniziale (x_0, y_0). Si determini

$$\bar{x}_\mu := \inf \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \,:\, \max_{t \in \mathbb{R}} x_\mu(t; (x_0, 0)) < 0 \right\} .$$

(c) Per $\varepsilon = 1$ e $\mu \in (0, \infty)$, si determini

$$\lim_{t \to +\infty} x_\mu(t; (\bar{x}_\mu, 0)) \,,$$

dove $\bar{x}_\mu$ è il valore del punto (b) [*Suggerimento:* usare la funzione hamiltoniana.]

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot x = y^2 - 2\mu x \\ \dot y = 4x^2 - y \end{cases}, \quad \mu \in \{0,1\}$$

- Identifichiamo i punti fissi del sistema, soluzioni di

$$\begin{cases} y^2 - 2\mu x = 0 \\ 4x^2 - y = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si trova $y = 4x^2$. Sostituendo nella prima, otteniamo $16x^4 - 2\mu x = 0 \iff 2x(8x^3-\mu) = 0$. Quindi i punti fissi sono:

se $\mu = 1$ $\quad P_1 = (0,0)$, $P_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\quad$ se $\mu = 0$ $\quad P = (0,0)$

- Orbite periodiche. Poiché $\operatorname{div} F(x,y) = -2\mu - 1 < 0$ su $\mathbb{R}^2$ per $\mu \geq 0$, le orbite periodiche non possono esistere per il criterio di Bendixson-Dulac.

- Rette invarianti. È immediato che non esistono rette invarianti della forma $x =$ cost. Poniamo quindi $I(x,y) = ax + by$ con $b \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, che verifica $\nabla I \neq \underline{0}$ $\forall (x,y)$ e cerchiamo $c \in \mathbb{R}$ tale che $\dot I|_{I=c} \equiv 0$. Si trova

$$\dot I(x,y)\Big|_{I=c} = a\dot x + b\dot y\Big|_{ax+by=c} = a(y^2 - 2\mu x) + b(4x^2 - y)\Big|_{y = \frac{c-ax}{b}} =$$

$$= a\frac{(c-ax)^2}{b^2} - 2\mu a x + 4bx^2 - (c - ax) =$$

$$= \frac{a}{b^2}(c^2 - 2acx + a^2x^2) - 2\mu a x + 4bx^2 - c + ax =$$

$$= \left(\frac{a^3}{b^2} + 4b\right)x^2 + \left(-\frac{2a^2c}{b^2} - 2\mu a + a\right)x + \left(\frac{ac^2}{b^2} - c\right)$$

Quindi $\dot I|_{I=c} \equiv 0 \iff \begin{cases} a^3 + 4b^3 = 0 \\ -2a^2c - 2\mu a b^2 + ab^2 = 0 \\ ac^2 - cb^2 = 0 \end{cases}$

Dalla prima equazione $a = -2^{2/3}b$, e la seconda diventa $2^{7/3}b^2c = 2^{2/3}b^3(2\mu - 1)$ da cui $c = 2^{-5/3}b(2\mu-1)$. Nella terza si ottiene $c\left(2^{7/3}b^2(2\mu-1) + b^2\right) = 0$, da cui $b = 0$ se $2^{7/3}(2\mu-1) \neq -1$. Quindi per $\mu \in \{0,1\}$ non ci sono soluzioni e dunque non esistono rette invarianti.

- Passiamo ora a studiare separatamente i due casi.

(a) Sia $\mu = 1$

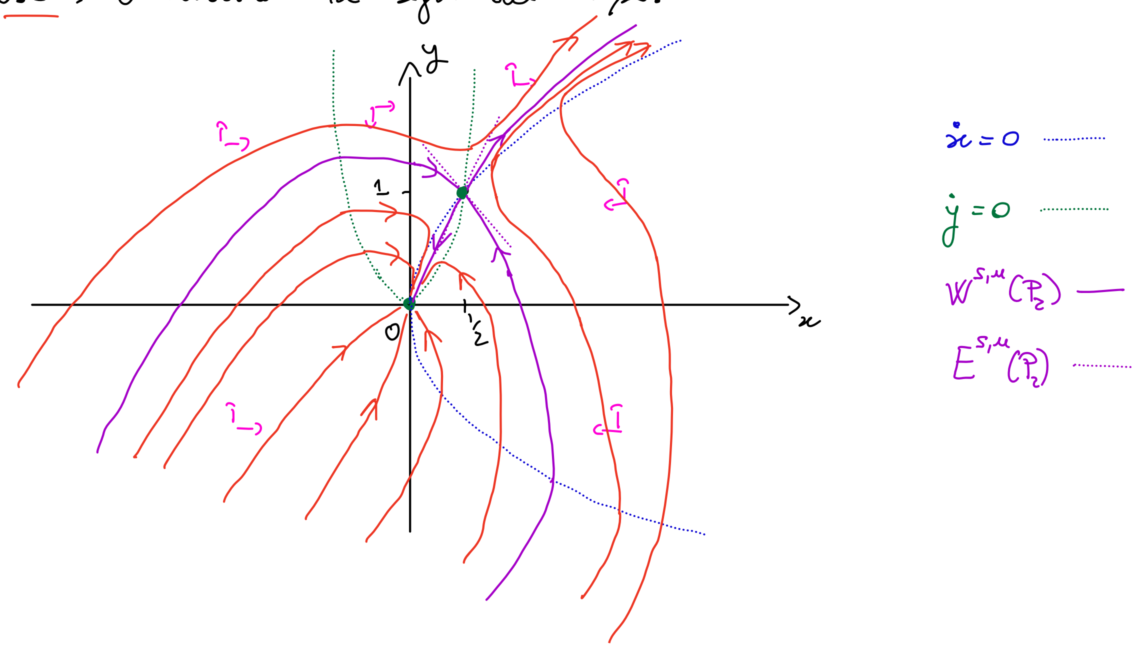
- Studiamo la stabilità dei punti fissi

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 8x & -1 \end{pmatrix}$$

- $P_1 = (0,0)$. Si ha $JF(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, entrambi negativi. Di conseguenza P_1 è un punto fisso iperbolico di tipo nodo stabile.

- $P_2 = (1/2, 1)$. Si ha $JF(P_2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, quindi $\det JF(P_2) = -6 < 0$, e di conseguenza P_2 è un punto fisso iperbolico di tipo sella. Gli autovalori di $JF(P_2)$ sono $\lambda_1 = \frac{-3+\sqrt{33}}{2} > 0$, $\lambda_2 = \frac{-3-\sqrt{33}}{2} < 0$, con autovettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix}$ rispettivamente.

- Ritratto di fase. Utilizziamo il segno del campo.



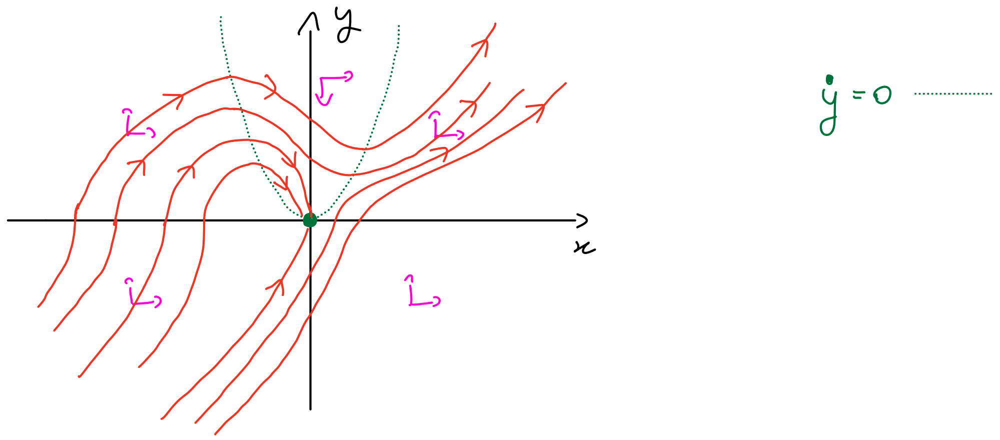
(b) Sia $\mu = 0$.

- Studiamo la stabilità del punto fisso. Abbiamo

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 8x & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha $JF(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, quindi $\det JF(P) = 0$, e di conseguenza P è un punto fisso non iperbolico. Poiché $\dot{x} > 0$ $\forall (x,y)$ con $y \neq 0$, ci aspettiamo che il punto sia instabile.

- Ritratto di fase. Utilizziamo il segno del campo.



ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\mu x^3 - x^2 + x + \varepsilon\left(-6y^2 - 3\mu x^4 - 4x^3 + 6x^2\right) \end{cases}$$

$$\mu \in [0, +\infty), \quad \varepsilon \in \{0, 1\}$$

$\boxed{(a)}$ Sia $\varepsilon = 0$ e $\mu \in [0, +\infty)$.

Il sistema è hamiltoniano di tipo meccanico ad un grado di libertà, con

$$H_\mu(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + W_\mu(x), \qquad W_\mu(x) = \frac{1}{4} \mu x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2$$

Iniziamo disegnando il grafico di $W_\mu(x)$.

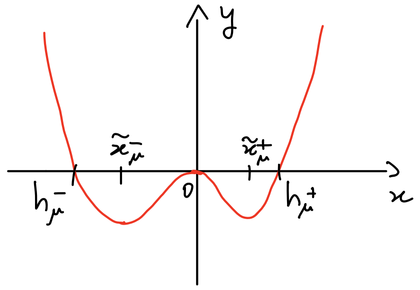
Se $\mu > 0$, $W_\mu(x) = \frac{1}{12} x^2 \left(3\mu x^2 + 4x - 6\right)$ e $W_\mu'(x) = x\left(\mu x^2 + x - 1\right)$. Quindi

$W_\mu(x) = 0 \iff x \in \left\{0, \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 18\mu}}{3\mu}\right\}$, $W_\mu'(x) = 0 \iff x \in \left\{0, \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\mu}}{2\mu}\right\}$

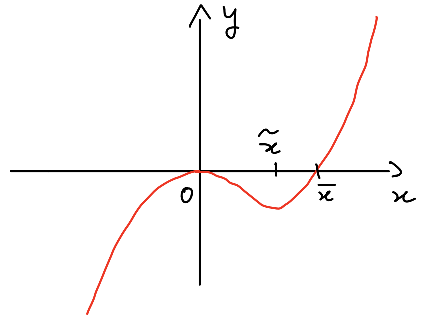
Se $\mu = 0$, $W_0(x) = \frac{1}{6} x^2 (2x - 3)$ e $W_0'(x) = x(x-1)$. Quindi

$W_0(x) = 0 \iff x \in \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$ e $W_0'(x) = 0 \iff x \in \{0, 1\}$.

$\mu > 0$



$\mu = 0$



$$\tilde{x}_\mu^\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\mu}}{2\mu} \quad , \quad h_\mu^\pm = \frac{-2 \pm \sqrt{4+18\mu}}{3\mu} \qquad\qquad \tilde{x} = 1 \, , \quad \bar{x} = \frac{3}{2}$$

Osserviamo che $W_\mu(\tilde{x}_\mu^-) < W_\mu(\tilde{x}_\mu^+)$.

Ne segue che i punti fissi del sistema sono:

- se $\mu = 0$, $\quad P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$.

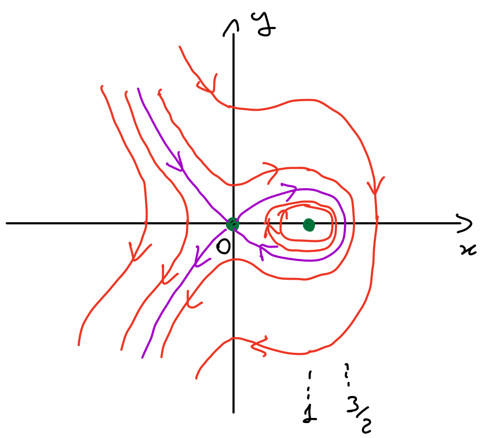
  P_1 è un punto di sella, P_2 è un centro.

- se $\mu > 0$, $\quad P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\tilde{x}_\mu^-, 0)$, $P_3 = (\tilde{x}_\mu^+, 0)$

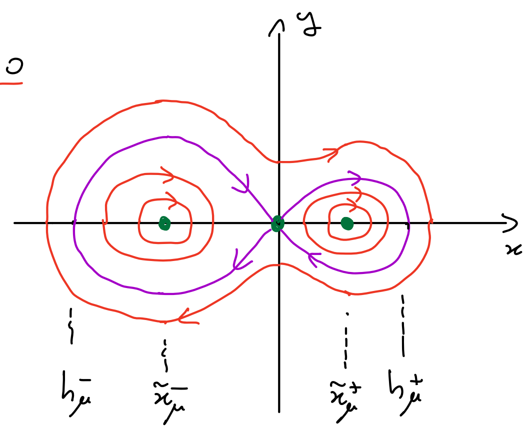
  P_1 è un punto di sella, P_2 e P_3 sono centri.

Quindi i ritratti di fase sono:

$\mu = 0$



$\mu > 0$



$\boxed{\text{(b)}}$ Fissiamo la condizione iniziale $(x_0, 0)$, e ci chiediamo per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $\max\limits_{t\in\mathbb{R}} x_\mu(t; (x_0,0)) < 0$. Chiaramente, ci restringiamo a $x_0 \in (-\infty, 0)$.

Dal ritratto di fase si ottiene che:

- se $\mu = 0$, per ogni $x_0 \in (-\infty, 0)$ si ha $\max\limits_{t\in\mathbb{R}} x_0(t; (x_0,0)) = x_0$.

  Quindi $\bar{x}_0 = -\infty$.

- se $\mu > 0$, per $x_0 \in (-\infty, h_\mu^-]$ si ha $\max\limits_{t\in\mathbb{R}} x_\mu(t; (x_0,0)) \geq 0$, mentre se $x_0 \in (h_\mu^-, 0)$, $\max\limits_{t} x_\mu(t; (x_0,0)) \in (\tilde{x}_\mu^-, 0)$.

Quindi $\boxed{\bar{x}_\mu = h_\mu^- = \dfrac{-2-\sqrt{4+18\mu}}{3\mu}}$

$\boxed{(c)}$ Consideriamo ora $\varepsilon = 1$ e $\mu \in (0,+\infty)$.

Analizziamo come si comporta la funzione hamiltoniana $H_\mu(x,y)$ lungo le orbite.

$$\dot{H}_\mu(x,y) = W_\mu'(x)\,\dot{x} + y \cdot \dot{y} = W_\mu'(x)\,\dot{x} + y\left[-W_\mu'(x) + \varepsilon\left(-6y^2 - 3\mu x^4 - 4x^3 + 6x^2\right)\right] =$$
$$= \varepsilon y \left(-12\, H_\mu(x,y)\right) = -12\,\varepsilon\, y\, H_\mu(x,y).$$

In particolare, $\{H_\mu(x,y) = 0\}$ è un insieme invariante. Osserviamo che $H_\mu(0,0) = 0$, quindi $\{H_\mu(x,y) = 0\}$ è l'insieme di livello che contiene il punto fisso $(0,0)$, e per $\mu > 0$ anche le due orbite omocline passanti per $(h_\mu^-, 0)$ e $(h_\mu^+, 0)$.

In particolare le due orbite omocline continuano a esistere per $\varepsilon = 1$, e quindi

$$\lim_{t \to +\infty} x_\mu(t; (\bar{x}_\mu, 0)) = \lim_{t \to +\infty} x_\mu(t; (h_\mu^-, 0)) = 0.$$