Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito A del 25-06-2019

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{xy^3}{2x^2+y^4}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è continua;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, 1 \leq 2x^2 + y^4 \leq 2\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x+1} + e^{(x^2)} + y \\ x - e^{(y^2)} \end{pmatrix}$$

i) dire se è conservativo nel suo dominio naturale;

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}(x,y)$ lungo la curva (γ, I) con $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\gamma : \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (\sin t\,,\, 1 - \cos t)$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - \sin^2 z = 0\,,\, -\frac{\pi}{4} \leq z \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

i) fare un disegno approssimativo di Σ e scriverne una parametrizzazione globale;

ii) dato l'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - \sin^2 z \leq 0\,,\, -\frac{\pi}{4} \leq z \leq \frac{\pi}{4}\,, x + y \geq 0\right\}$$

calcolare l'integrale

$$\iiint_V (x+y)\, dxdydz$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{xy^3}{2x^2+y^4}\,, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1\,, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è continua;

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R}^2$, e per tutti i punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la funzione si può scrivere come somma e rapporto di polinomi, dunque è continua. Rimane da studiare la continuità in $(0,0)$.

Dobbiamo quindi determinare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

Iniziamo studiando il limite lungo alcune direzioni. Iniziamo con le rette $\{y = \lambda x\}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\lambda^3 x^4}{2x^2 + \lambda^4 x^4}\right) = 1\,, \forall\, \lambda$$

Passando alle curve della forma $\{y = x^\alpha\}$ con $\alpha > 0$, si trova

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,x^\alpha) = \lim_{x\to 0^+}\left(1 + \frac{x^{1+3\alpha}}{2x^2 + x^{4\alpha}}\right) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+}\left(1 + \frac{x^{1+3\alpha}}{2x^2+o(x^2)}\right) = 1\,, & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ \lim_{x\to 0^+}\left(1 + \frac{x^{1+\frac{3}{2}}}{3x^2}\right) = 1\,, & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ \lim_{x\to 0^+}\left(1 + \frac{x^{1+\frac{3}{2}}}{x^{4\alpha}+o(x^{4\alpha})}\right) = 1\,, & \text{se } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Avendo ottenuto sempre lo stesso limite, proviamo a dimostrare l'esistenza del limite applicando il Teorema del Confronto. Possiamo scrivere

$$0 \leq |f(x,y) - 1| = \left|\frac{xy^3}{2x^2 + y^4}\right| \leq \frac{(x^2 + y^4)|y|}{2x^2 + y^4} \leq |y| =: g(x,y)$$

Poiché la funzione $g(x,y)$ trovata è definita in un intorno di $(0,0)$, verifica la disuguaglianza vista sopra e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

per i teoremi di carattere generale, abbiamo dimostrato che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$$

Visto che $f(0,0) = 1$ si ha che la funzione $f(x,y)$ è continua anche in $(0,0)$.

In conclusione, la funzione $f(x,y)$ è continua in tutto il suo dominio naturale $\mathbb{R}^2$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, 1 \leq 2x^2 + y^4 \leq 2\right\}\,.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

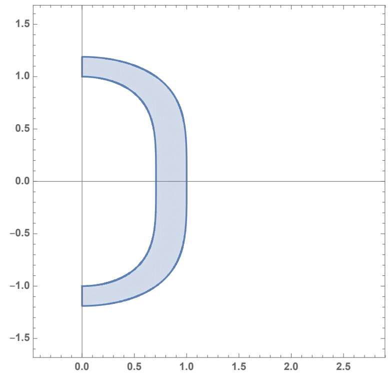

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

La funzione f è certamente differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ per i teoremi di carattere generale. Poiché Ω non contiene $(0,0)$, non ci sono punti di eventuale non differenziabilità in Ω. Quindi possiamo anche cercare i punti critici liberi interni a Ω come punti in cui si annulla il gradiente di f, che in Ω è dato da

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^3(-2x^2+y^4)}{(2x^2+y^4)^2} \\ \\ \frac{xy^2(6x^2-y^4)}{(2x^2+y^4)^2} \end{pmatrix}$$

per ogni $(x,y) \neq (0,0)$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{y^3(-2x^2+y^4)}{(2x^2+y^4)^2} = 0 \\ \\ \frac{xy^2(6x^2-y^4)}{(2x^2+y^4)^2} = 0 \\ \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo $y = 0$ oppure $y^4 = 2x^2$. Ci riduciamo quindi a

$$\begin{cases} y = 0 \\ \\ \frac{xy^2(6x^2-y^4)}{(2x^2+y^4)^2} = 0 \\ \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} y \neq 0 \\ \\ y^4 = 2x^2 \\ \\ \frac{xy^2(6x^2-y^4)}{(2x^2+y^4)^2} = 0 \\ \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Nel primo sotto-sistema si trova che tutti i punti della forma $(x, 0)$ con $x \neq 0$ sono soluzioni, quindi annotiamo i punti critici liberi interni a Ω

$$C = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall\, x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$$

Nel secondo sotto-sistema, la seconda equazione si riduce a $4\sqrt{2}x^3\,|x| = 0$, che non è compatibile con le prime due equazioni.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in quattro parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ x = 0\,,\, -2^{\frac{1}{4}} \leq y \leq -1 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ x = 0\,,\, 1 \leq y \leq 2^{\frac{1}{4}} \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ 2x^2 + y^4 = 1\,,\, x \geq 0 \right\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{ 2x^2 + y^4 = 2\,,\, x \geq 0 \right\}.$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (0\,,\, t)\,, \qquad t \in \left[-2^{\frac{1}{4}}\,,\, -1 \right],$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 1, \qquad t \in \left[-2^{\frac{1}{4}}\,,\, -1 \right].$$

Essendo g_1 una funzione costante, tutti i punti di Γ_1 sono punti critici vincolati, e per i valori della funzione possiamo usare gli spigoli S_1 e S_2.

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (0\,,\, t)\,, \qquad t \in \left[1\,,\, 2^{\frac{1}{4}} \right],$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 1, \qquad t \in \left[1\,,\, 2^{\frac{1}{4}} \right].$$

Essendo g_2 una funzione costante, tutti i punti di Γ_2 sono punti critici vincolati, e per i valori della funzione possiamo usare gli spigoli S_3 e S_4.

Per quanto riguarda Γ_3 usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con $G_3(x, y) = 2x^2 + y^4$, per cui cerchiamo soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} \frac{y^3(-2x^2+y^4)}{(2x^2+y^4)^2} = 4x\lambda \\ \frac{xy^2(6x^2-y^4)}{(2x^2+y^4)^2} = 4y^3\lambda \\ 2x^2 + y^4 = 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Innanzitutto poniamo $2x^2+y^4=1$ nella prima e nella seconda equazione. Studiando poi la seconda equazione, riscriviamo il sistema come

$$\begin{cases} y^3(-2x^2+y^4)=4x\lambda \\ y=0 \\ 2x^2+y^4=1 \\ x>0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} y^3(-2x^2+y^4)=4x\lambda \\ y\neq 0 \\ \lambda=\frac{x}{4y}\,(6x^2-y^4) \\ 2x^2+y^4=1 \\ x>0 \end{cases}$$

Dal primo sotto-sistema otteniamo l'unica soluzione $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)$, e quindi il punto critico vincolato

$$Q_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dal secondo sotto-sistema, sostituendo il valore di λ dalla terza equazione nella prima equazione, abbiamo

$$y^4(-2x^2+y^4)=x^2(6x^2-y^4)$$

Usando infine $y^4=1-2x^2$, arriviamo all'equazione $x^2=\frac{1}{5}$, e quindi troviamo due punti critici vincolati

$$Q_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda Γ_4 potremmo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange come fatto per Γ_3, oppure usiamo la parametrizzazione

$$\gamma_4(t)=\left(\sqrt{1-\frac{t^4}{2}}\,,\,t\right), \qquad t\in\left[-2^{\frac{1}{4}}\,,\,2^{\frac{1}{4}}\right],$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_4(t)=f(\gamma_4(t))=1+\frac{t^3}{2}\sqrt{1-\frac{t^4}{2}}, \qquad t\in\left[-2^{\frac{1}{4}}\,,\,2^{\frac{1}{4}}\right].$$

Poiché $g_4'(t)=\frac{t^2(6-5t^4)}{4\sqrt{1-\frac{t^4}{2}}}$, troviamo i punti critici $t=0$ e $t=\pm(\frac{6}{5})^{\frac{1}{4}}$, tutti nell'intervallo $(-2^{\frac{1}{4}}\,,\,2^{\frac{1}{4}})$. Otteniamo quindi altri tre punti critici vincolati

$$Q_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_5=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{5}} \\ \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_6=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{5}} \\ -\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C)=f(S_1)=f(S_2)=f(S_3)=f(S_4)=f(Q_1)=f(Q_4)=1$$

$$f(Q_2)=1+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}, \quad f(Q_3)=1-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}, \quad f(Q_5)=1+2^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}, \quad f(Q_6)=1-2^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$$

Poiché $2^{\frac{1}{4}} > 1$, il massimo di f è $1 + 2^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ e il minimo è $1 - 2^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$.

Esercizio 2. *Dato il campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x+1} + e^{(x^2)} + y \\ x - e^{(y^2)} \end{pmatrix}$$

i) dire se è conservativo nel suo dominio naturale;

Il dominio naturale del campo $\mathbf{F}$ è l'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq -1\}$. Calcoliamo innanzitutto il rotore del campo. Si ha

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 1 - 1 = 0$$

quindi il campo è irrotazionale.

Poiché X è semplicemente connesso, per il Lemma di Poincaré il campo $\mathbf{F}$ è conservativo nel suo dominio naturale.

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}(x,y)$ lungo la curva (γ, I) con $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\gamma : \left[0\,,\, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (\sin t\,,\, 1 - \cos t)$$

La curva (γ, I) è di classe C^1 e il suo sostegno è contenuto nel dominio naturale del campo, visto che $\gamma_1(t) = \sin t \geq 0$ per ogni $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Visto che il campo è conservativo possiamo cercare un potenziale del campo, oppure usare che il lavoro di due curve con sostegno contenuto in X è uguale se le due curve hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale.

Abbiamo che il punto iniziale di (γ, I) è $P = \gamma(0) = (0,0)$, mentre il suo punto finale è $Q = \gamma(\frac{\pi}{2}) = (1,1)$. Quindi se scegliamo

$$\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = (t,t)$$

abbiamo $P = \tilde{\gamma}(0)$ e $Q = \tilde{\gamma}(1)$, e quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_0^1 < \begin{pmatrix} \sqrt{t+1} + e^{(t^2)} + t \\ t - e^{(t^2)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > dt = \int_0^1 \left(\sqrt{t+1} + 2t\right) dt =$$

$$= \left(\frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1) + 1$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - \sin^2 z = 0\,,\, -\frac{\pi}{4} \leq z \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

i) fare un disegno approssimativo di Σ e scriverne una parametrizzazione globale;

L'insieme Σ si può interpretare come superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare il grafico della funzione $y = g(z)$, con $g : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ data da $g(z) = |\sin z|$, intorno all'asse z. Si ottiene quindi il disegno in figura 2.

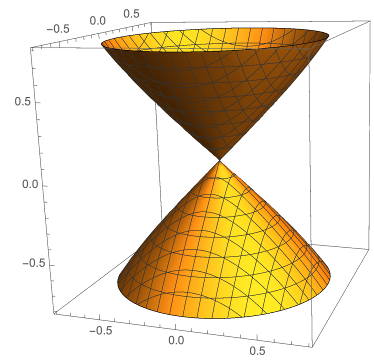

Figure 2: La superficie Σ.

Possiamo poi scrivere la parametrizzazione globale

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 , \qquad \sigma(t, \theta) = (|\sin t| \cos\theta \, , \, |\sin t| \sin\theta \, , \, t) \ .$$

con

$$D = \left\{ (t, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \ : \ -\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4} \right\}$$

ii) dato l'insieme

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - \sin^2 z \le 0 \, , \, -\frac{\pi}{4} \le z \le \frac{\pi}{4} \, , x + y \ge 0 \right\}$$

calcolare l'integrale

$$\iiint_V (x + y) \, dxdydz$$

L'insieme V si può scrivere nella forma

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -\frac{\pi}{4} \le z \le \frac{\pi}{4} \, , \, (x, y) \in V_z \right\}$$

dove $V_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \le \sin^2 z \, , \, x + y \ge 0 \right\}$.

Possiamo quindi calcolare l'integrale utilizzando la formula di integrazione per strati, da cui

$$\iiint_V (x + y) \, dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\iint_{V_z} (x + y) \, dxdy \right) dz$$

Esprimendo lo strato V_z in coordinate polari come $V_z = \psi(S_z)$ dove

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y) \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right. \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho, \theta)| = \rho$$

e

$$S_z = \Big\{(\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi] \,:\, \rho^2 \leq \sin^2 z\,,\ \rho\cos\theta + \rho\sin\theta \geq 0\Big\} = \Big[0, |\sin z|\Big] \times \Big[-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{3\pi}{4}\Big]\,,$$

otteniamo

$$\iint_{V_z} (x+y)\,dxdy = \iint_{S_z} \rho^2(\cos\theta + \sin\theta)\,d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \Big(\int_0^{|\sin z|} \rho^2(\cos\theta+\sin\theta)\,d\rho\Big)\,d\theta =$$

$$= \frac{|\sin z|^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta = \frac{|\sin z|^3}{3} \Big(\sin\theta - \cos\theta\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,|\sin z|^3\,.$$

Quindi

$$\iiint_V (x+y)\,dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\iint_{V_z} (x+y)\,dxdy\Big)\,dz = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{3}\sqrt{2}\,|\sin z|^3\,dz =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 z\,dz = \frac{4}{3}\sqrt{2}\Big(-\cos z + \frac{1}{3}\cos^3 z\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{9}(8-5\sqrt{2})\,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito B del 25-06-2019

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 + \frac{x^3 y}{x^4+2y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è continua;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0\,,\, 1 \leq x^4 + 2y^2 \leq 2\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin\left(e^{(x^2)}\right) + 2xy \\ x^2 + \sqrt{y+1} + \sin\left(e^{(y^2)}\right) \end{pmatrix}$$

i) dire se è conservativo nel suo dominio naturale;

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}(x,y)$ lungo la curva (γ, I) con $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\gamma : \left[0\,,\, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (-\sin t\,,\, 1 - \cos t)$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - \cos^2 z = 0\,,\, \frac{\pi}{3} \leq z \leq \frac{2\pi}{3}\right\}$$

i) fare un disegno approssimativo di Σ e scriverne una parametrizzazione globale;

ii) dato l'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - \cos^2 z \leq 0\,,\, \frac{\pi}{3} \leq z \leq \frac{2\pi}{3}\,, x - y \geq 0\right\}$$

calcolare l'integrale

$$\iiint_V (x-y)\, dxdydz$$

Svolgimento

Esercizio 1. Vedi Esercizio 1 del compito A. Basta scambiare x e y.

Esercizio 2. *Dato il campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin\left(e^{(x^2)}\right) + 2xy \\ x^2 + \sqrt{y+1} + \sin\left(e^{(y^2)}\right) \end{pmatrix}$$

i) dire se è conservativo nel suo dominio naturale;

Il dominio naturale del campo $\mathbf{F}$ è l'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq -1\}$. Calcoliamo innanzitutto il rotore del campo. Si ha

$$\text{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2x - 2x = 0$$

quindi il campo è irrotazionale.

Poiché X è semplicemente connesso, per il Lemma di Poincaré il campo $\mathbf{F}$ è conservativo nel suo dominio naturale.

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}(x,y)$ lungo la curva (γ, I) con $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\gamma : \left[0\,,\, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (-\sin t\,,\, 1 - \cos t)$$

La curva (γ, I) è di classe C^1 e il suo sostegno è contenuto nel dominio naturale del campo, visto che $\gamma_2(t) = 1 - \cos t \geq 0$ per ogni $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Visto che il campo è conservativo possiamo cercare un potenziale del campo, oppure usare che il lavoro di due curve con sostegno contenuto in X è uguale se le due curve hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale.

Abbiamo che il punto iniziale di (γ, I) è $P = \gamma(0) = (0,0)$, mentre il suo punto finale è $Q = \gamma(\frac{\pi}{2}) = (-1,1)$. Quindi se scegliamo

$$\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = (-t, t)$$

abbiamo $P = \tilde{\gamma}(0)$ e $Q = \tilde{\gamma}(1)$, e quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_0^1 < \begin{pmatrix} \sin\left(e^{(t^2)}\right) - 2t^2 \\ t^2 + \sqrt{t+1} + \sin\left(e^{(t^2)}\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} > dt = \int_0^1 \left(3t^2 + \sqrt{t+1}\right)\, dt =$$

$$= \left(t^3 + \frac{2}{3}\,(t+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1)$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-\cos^2 z = 0\,,\ \frac{\pi}{3} \leq z \leq \frac{2\pi}{3} \right\}$$

i) fare un disegno approssimativo di Σ e scriverne una parametrizzazione globale;

L'insieme Σ si può interpretare come superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare il grafico della funzione $y = g(z)$, con $g : [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \to \mathbb{R}$ data da $g(z) = |\cos z|$, intorno all'asse z. Si ottiene quindi il disegno in figura 3.

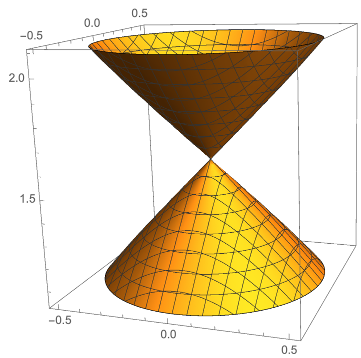

Figure 3: La superficie Σ.

Possiamo poi scrivere la parametrizzazione globale

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(x,y) = (|\cos t|\,\cos\theta\,,\ |\cos t|\,\sin\theta\,,\ t)\ .$$

con

$$D = \left\{ (t,\theta) \in \mathbb{R}\times[0,2\pi] \,:\, \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2\pi}{3} \right\}$$

ii) dato l'insieme

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-\cos^2 z \leq 0\,,\ \frac{\pi}{3} \leq z \leq \frac{2\pi}{3}\,, x-y \geq 0 \right\}$$

calcolare l'integrale

$$\iiint_V (x-y)\,dxdydz$$

L'insieme V si può scrivere nella forma

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{\pi}{3} \leq z \leq \frac{2\pi}{3}\,,\ (x,y) \in V_z \right\}$$

dove $V_z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq \cos^2 z\,,\ x-y \geq 0 \right\}$.

Possiamo quindi calcolare l'integrale utilizzando la formula di integrazione per strati, da cui

$$\iiint_V (x-y)\,dxdydz = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\iint_{V_z} (x-y)\,dxdy\right) dz$$

Esprimendo lo strato V_z in coordinate polari come $V_z = \psi(S_z)$ dove

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho$$

e

$$S_z = \left\{(\rho,\theta) \in (0,+\infty)\times[0,2\pi] \,:\, \rho^2 \le \cos^2 z\,,\ \rho\cos\theta - \rho\sin\theta \ge 0\right\} = \Big[0,|\cos z|\Big] \times \left[-\frac{3\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{4}\right],$$

otteniamo

$$\iint_{V_z} (x-y)\,dxdy = \iint_{S_z} \rho^2(\cos\theta - \sin\theta)\,d\rho d\theta = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{|\cos z|} \rho^2(\cos\theta-\sin\theta)\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \frac{|\cos z|^3}{3}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta = \frac{|\cos z|^3}{3}\Big(\sin\theta + \cos\theta\Big)\Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,|\cos z|^3\,.$$

Quindi

$$\iiint_V (x-y)\,dxdydz = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\iint_{V_z} (x-y)\,dxdy\right) dz = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{2}{3}\sqrt{2}\,|\cos z|^3\,dz =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 z\,dz = \frac{4}{3}\sqrt{2}\left(\sin z - \frac{1}{3}\sin^3 z\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{18}(16 - 9\sqrt{3})\,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito C del 25-06-2019

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{x^3 y}{x^4+2y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è continua;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0\,,\, 1 \leq x^4 + 2y^2 \leq 2\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \log\left(1 + e^{(x^2)}\right) + y^2 \\ 2xy + \sqrt{y+2} + \log\left(1 + e^{(y^2)}\right) \end{pmatrix}$$

i) dire se è conservativo nel suo dominio naturale;

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}(x,y)$ lungo la curva (γ, I) con $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\gamma : \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (\sin t\,,\, -1 + \cos t)$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - \cos^2 z = 0\,,\, \frac{\pi}{3} \leq z \leq \frac{2\pi}{3}\right\}$$

i) fare un disegno approssimativo di Σ e scriverne una parametrizzazione globale;

ii) dato l'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - \cos^2 z \leq 0\,,\, \frac{\pi}{3} \leq z \leq \frac{2\pi}{3}\,, x - y \geq 0\right\}$$

calcolare l'integrale

$$\iiint_V (x-y)\, dxdydz$$

Svolgimento

Esercizio 1. Vedi Esercizio 1 del compito A. Basta scambiare x e y.

Esercizio 2. *Dato il campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \log\left(1+e^{(x^2)}\right) + y^2 \\ 2xy + \sqrt{y+2} + \log\left(1+e^{(y^2)}\right) \end{pmatrix}$$

i) dire se è conservativo nel suo dominio naturale;

Il dominio naturale del campo $\mathbf{F}$ è l'insieme $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq -2\right\}$. Calcoliamo innanzitutto il rotore del campo. Si ha

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2y - 2y = 0$$

quindi il campo è irrotazionale.

Poiché X è semplicemente connesso, per il Lemma di Poincaré il campo $\mathbf{F}$ è conservativo nel suo dominio naturale.

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}(x,y)$ lungo la curva (γ, I) con $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\gamma : \left[0\,,\, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (\sin t\,,\, -1+\cos t)$$

La curva (γ, I) è di classe C^1 e il suo sostegno è contenuto nel dominio naturale del campo, visto che $\gamma_2(t) = -1 + \cos t \geq -1$ per ogni $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Visto che il campo è conservativo possiamo cercare un potenziale del campo, oppure usare che il lavoro di due curve con sostegno contenuto in X è uguale se le due curve hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale.

Abbiamo che il punto iniziale di (γ, I) è $P = \gamma(0) = (0,0)$, mentre il suo punto finale è $Q = \gamma(\frac{\pi}{2}) = (1,-1)$. Quindi se scegliamo

$$\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = (t, -t)$$

abbiamo $P = \tilde{\gamma}(0)$ e $Q = \tilde{\gamma}(1)$, e quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_0^1 < \begin{pmatrix} \log\left(1+e^{(t^2)}\right) + t^2 \\ -2t^2 + \sqrt{-t+2} + \log\left(1+e^{(t^2)}\right) \end{pmatrix} \,,\, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} > dt = \int_0^1 \left(3t^2 - \sqrt{2-t}\right)\, dt =$$

$$= \left(t^3 + \frac{2}{3}\,(2-t)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{2}{3}(1 - 2^{\frac{3}{2}})$$

Esercizio 3. Vedi Esercizio 3 del compito B.

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito D del 25-06-2019

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 + \frac{xy^3}{2x^2+y^4}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è continua;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, 1 \leq 2x^2 + y^4 \leq 2\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{(x^2+x)} + 2y \\ 2x + \sqrt{y+1} - e^{(y^2+y)} \end{pmatrix}$$

i) dire se è conservativo nel suo dominio naturale;

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}(x,y)$ lungo la curva (γ, I) con $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\gamma : \left[0\,,\, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (\sin t\,,\, 1 - \cos t)$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - \sin^2 z = 0\,,\, -\frac{\pi}{4} \leq z \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

i) fare un disegno approssimativo di Σ e scriverne una parametrizzazione globale;

ii) dato l'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - \sin^2 z \leq 0\,,\, -\frac{\pi}{4} \leq z \leq \frac{\pi}{4}\,, x + y \geq 0\right\}$$

calcolare l'integrale

$$\iiint_V (x+y)\, dxdydz$$

Svolgimento

Esercizio 1. Vedi Esercizio 1 del compito A.

Esercizio 2. *Dato il campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{(x^2+x)} + 2y \\ 2x + \sqrt{y+1} - e^{(y^2+y)} \end{pmatrix}$$

i) dire se è conservativo nel suo dominio naturale;

Il dominio naturale del campo $\mathbf{F}$ è l'insieme $X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq -1\big\}$. Calcoliamo innanzitutto il rotore del campo. Si ha

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2 - 2 = 0$$

quindi il campo è irrotazionale.

Poiché X è semplicemente connesso, per il Lemma di Poincaré il campo $\mathbf{F}$ è conservativo nel suo dominio naturale.

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}(x,y)$ *lungo la curva* (γ, I) *con* $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ *e*

$$\gamma : \left[0\,,\, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (\sin t\,,\, 1 - \cos t)$$

La curva (γ, I) è di classe C^1 e il suo sostegno è contenuto nel dominio naturale del campo, visto che $\gamma_1(t) = \sin t \geq 0$ per ogni $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Visto che il campo è conservativo possiamo cercare un potenziale del campo, oppure usare che il lavoro di due curve con sostegno contenuto in X è uguale se le due curve hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale.

Abbiamo che il punto iniziale di (γ, I) è $P = \gamma(0) = (0,0)$, mentre il suo punto finale è $Q = \gamma(\frac{\pi}{2}) = (1,1)$. Quindi se scegliamo

$$\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = (t,t)$$

abbiamo $P = \tilde{\gamma}(0)$ e $Q = \tilde{\gamma}(1)$, e quindi

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = \int_0^1 < \begin{pmatrix} e^{(t^2+t)} + 2t \\ 2t + \sqrt{t+1} - e^{(t^2+t)} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > dt = \int_0^1 \left(4t + \sqrt{t+1}\right) dt =$$

$$= \left(2t^2 + \frac{2}{3}\,(t+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 = 2 + \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1)$$

Esercizio 3. Vedi Esercizio 3 del compito A.