

**Sistemi Dinamici**  
**Corso di Laurea in Matematica**  
**Compito del 24-07-2024**

**Esercizio 1. (10 punti)** Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y - 2 \\ \dot{y} = 4x(y - 1) \end{cases}$$

- (a) Disegnare il ritratto di fase del sistema.
- (b) Trovare l'espressione analitica dell'insieme invariante contenente il punto  $(0, 0)$ .

**Esercizio 2. (10 punti)** Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu y \\ \dot{y} = 4x^3 + 3x^5 - x^7 \end{cases}$$

al variare di  $\mu \in (0, +\infty)$ .

- (a) Disegnare il ritratto di fase al variare di  $\mu$  (descrivere cosa cambia al variare di  $\mu$ ).
- (b) Indicando con  $(x(t), y(t))$  la soluzione del sistema con condizione iniziale  $(2, 2)$ , determinare

$$\mu^* := \sup \{ \mu > 0 : x(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \}.$$

**Esercizio 3. (10 punti)** Dato l'intervallo  $[0, 1]$ , si consideri la partizione  $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3\}$  con  $J_1 = [0, \frac{1}{3}]$ ,  $J_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ,  $J_3 = [\frac{2}{3}, 1]$  e la famiglia di trasformazioni continue  $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definita da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & x \in J_1, \\ \lambda \left(\frac{2}{3} - x\right), & x \in J_2, \\ 3x - 2, & x \in J_3, \end{cases}$$

con  $\lambda \in (0, 3]$ .

- (a) Costruire l' $f_\lambda$ -grafo di  $\mathcal{J}$  al variare di  $\lambda$ .
- (b) Usare l' $f_\lambda$ -grafo di  $\mathcal{J}$  per mostrare che il sistema è caotico per  $\lambda \geq 2$ .
- (c) Costruire un ferro di cavallo per un'opportuna iterata di  $f_\lambda$  per  $\lambda \in [\sqrt{2}, 2]$ . Cosa si può dire per  $\lambda \in (0, \sqrt{2})$ ?

# ESERCIZIO

1

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y - 2 \\ \dot{y} = 4x(y-1) \end{cases}$$

(a)

## Punti fissi

Dalla seconda equazione si trova  $x=0$  oppure  $y=1$ . Sostituendo nella prima equazione troviamo tre punti fissi

$$\underline{P_1 = (0, 2)}, \quad \underline{P_2 = (1, 1)}, \quad \underline{P_3 = (-1, 1)}$$

Per studiare la loro stabilità usiamo che

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 4(y-1) & 4x \end{pmatrix}$$

da cui:

-  $P_1 = (0, 2)$ ,  $JF(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\det JF(P_1) = -4 < 0$ , quindi  $P_1$

è un punto fisso iperbolico di tipo sella, e quindi instabile.

-  $P_2 = (1, 1)$ ,  $JF(P_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $JF(P_2)$  ha autovalori  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ ,

quindi  $P_2$  è un punto fisso iperbolico di tipo nodo instabile.

-  $P_3 = (-1, 1)$ ,  $JF(P_3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $JF(P_3)$  ha autovalori  $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -2$ ,

quindi  $P_3$  è un punto fisso iperbolico di tipo nodo stabile.

Invarianti. Dalla seconda equazione si ottiene che la retta  $y=1$  è invariante, come si può verificare ponendo  $I(x, y) = y$  e mostrando che

$$\dot{I}|_{I=1}(x, y) = \dot{y}|_{y=1} \equiv 0.$$

Si verifica che non ci siano altre rette invarianti. Ponendo  $I(x, y) = ax + by - c$  con  $a \neq 0$  si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{I}|_{I=0}(x,y) &= a \dot{x} + b \dot{y}|_{x=\frac{c-by}{a}} = a \left( \frac{(c-by)^2}{a^2} + y - 2 \right) + b \left( 4 \frac{c-by}{a} (y-1) \right) = \\ &= \frac{c^2}{a} - \frac{2bcy}{a} + \frac{b^2 y^2}{a} + ay - 2a + \frac{4bcy}{a} - \frac{4bc}{a} - \frac{4b^2 y^2}{a} + \frac{4b^2 y}{a} = \\ &= -\frac{3b^2}{a} y^2 + \left( \frac{2bc}{a} + a + \frac{4b^2}{a} \right) y + \frac{c^2}{a} - 2a - \frac{4bc}{a} \neq 0 \text{ se } a \neq 0. \end{aligned}$$

Se invece  $I(x,y) = by - c$  con  $b \neq 0$ , allora

$$\dot{I}|_{I=0}(x,y) = b \dot{y}|_{y=\frac{c}{b}} = 4bx \left( \frac{c}{b} - 1 \right) \equiv 0 \text{ se e solo se } b=c, \text{ da cui si}$$

ottiene nuovamente la retta  $y=1$ .

Simmetrie. Si verifica che se  $(x(t), y(t))$  è soluzione del sistema allora lo è

anche  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) := (-x(-t), y(-t))$ , in fatti:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(-t) = x^2(-t) + y(-t) - 2 = (-x(-t))^2 + y(-t) - 2 = \tilde{x}^2(t) + \tilde{y}(t) - 2$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = -\dot{y}(-t) = -4x(-t)(y(-t)-1) = 4\tilde{x}(t)(\tilde{y}(t)-1)$$

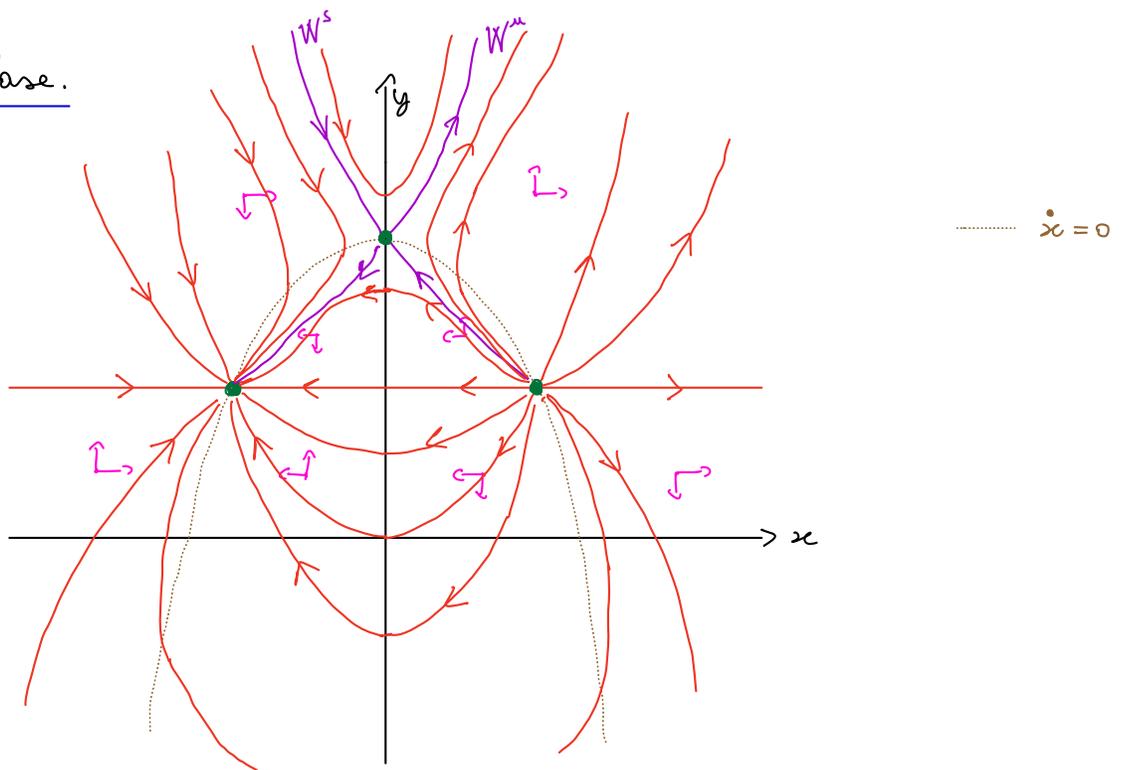
Orbite periodiche. Per la teoria dell'indice di Poincaré, possono esistere orbite

periodiche solo se racchiudono soltanto  $P_2$  o  $P_3$ , oppure tutti i punti fissi

insieme. Tuttavia la retta invariante  $y=1$  passa per  $P_2$  e  $P_3$ , quindi impedisce

l'esistenza di orbite periodiche.

Ritratto di fase.



(b)

Usiamo qualche suggerimento dal ritratto di fase. Il punto  $(0,0)$  non è fisso e il campo di vettori verifica  $F(0,0) = (-2, 0)$ . Ne segue che l'insieme invariante in cui è contenuto  $(0,0)$  deve contenere l'orbita di  $(0,0)$  (che dovrebbe essere eteroclino a  $P_2$  e  $P_3$ ), la quale è tangente all'asse  $x$  in  $(0,0)$ . Usando queste informazioni possiamo dedurre che in un intorno  $U(0,0)$  l'insieme invariante si può scrivere come grafico di una funzione  $h(x)$  f.c.  $h(0)=0, h'(0)=0$ . Il campo  $F$  è di classe  $C^\infty$ , dunque anche  $h \in C^\infty$  e possiamo considerare il suo polinomio di Taylor di grado  $N$  in  $x_0=0$

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{1}{2} h''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{N!} h^{(N)}(0)x^N + o(x^{N+1})$$

$$= \frac{c_2}{2} x^2 + \frac{c_3}{3!} x^3 + \dots + \frac{c_N}{N!} x^N + o(x^{N+1}).$$

Imponendo che  $\{y=h(x)\}$  sia invariante troviamo

$$0 \equiv \dot{y} - h'(x)\dot{x} \Big|_{y=h(x)} = 4x(h(x)-1) - h'(x)(x^2+h(x)-2) =$$

$$= 4x \left( -1 + \frac{c_2}{2} x^2 + \frac{c_3}{3!} x^3 + \dots + \frac{c_N}{N!} x^N \right) - \left( c_2 x + \frac{c_3}{2} x^2 + \frac{c_4}{3!} x^3 + \dots + \frac{c_N}{(N-1)!} x^{N-1} \right) \cdot$$

$$\cdot \left( -2 + \left( \frac{c_2}{2} + 1 \right) x^2 + \frac{c_3}{3!} x^3 + \dots + \frac{c_N}{N!} x^N \right) + o(x^N) =$$

$$= x(-4 + 2c_2) + c_3 x^2 + x^3 \left( 2c_2 - c_2 \left( \frac{c_2}{2} + 1 \right) - \frac{2c_4}{3!} \right) + x^4 \left( \frac{4}{3!} c_3 - \frac{c_2 c_3}{3!} + \frac{c_4}{2} \left( \frac{c_2}{2} + 1 \right) + \frac{2}{5!} c_5 \right) +$$

$$+ x^5 \left( \frac{4}{4!} c_4 - \frac{c_2 c_4}{4!} - \frac{c_3^2}{2 \cdot 3!} - \frac{c_4}{3!} \left( \frac{c_2}{2} + 1 \right) + \frac{2}{6!} c_6 \right) + \dots$$

Da questi primi casi si trova  $c_2=2, c_3=c_4=c_5=c_6=0$ . Continuando con queste informazioni troviamo

$$0 \equiv \dot{y} - h'(x)\dot{x} \Big|_{y=h(x)} = 4x \left( -1 + x^2 + \frac{c_7}{7!} x^7 + \frac{c_8}{8!} x^8 + \dots \right) - \left( 2x + \frac{c_7}{7!} x^6 + \frac{c_8}{8!} x^7 + \dots \right) \cdot$$

$$\cdot \left( -2 + 2x^2 + \frac{c_7}{7!} x^7 + \frac{c_8}{8!} x^8 + \dots \right) =$$

$$= x^6 \left( + \frac{2}{7!} c_7 \right) + x^7 \left( + \frac{2}{8!} c_8 \right) + x^8 \left( \frac{4}{7!} c_7 - \frac{2}{7!} c_7 - \frac{2}{7!} c_7 + \frac{2}{9!} c_9 \right) + \dots$$

da cui  $c_7=c_8=c_9=0$ .

Ci si può quindi convincere che la soluzione sia  $h(x)=x^2$ , e verificare che  $\{y=x^2\}$  è l'insieme invariante che contiene  $(0,0)$ . Infatti ponendo

$$I(x,y) = y - x^2 \quad \text{e} \quad \nabla I(x,y) = (-2x, 1) \neq 0 \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}|_{I=0}(x,y) &= -2x \cdot \dot{x} + \dot{y} \Big|_{y=x^2} = -2x(x^2 + y - 2) + 4x(y-2) \Big|_{y=x^2} = \\ &= -2x(2x^2 - 2) + 4x(x^2 - 2) \equiv 0. \end{aligned}$$

ESERCIZIO

2

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu y \\ \dot{y} = 4x^3 + 3x^5 - x^7 \end{cases}, \quad \mu \in (0, +\infty)$$

(a)

Il sistema è hamiltoniano di tipo meccanico con funzione hamiltoniana

$$H_\mu(x,y) = \frac{1}{2} \mu y^2 + V(x), \quad \text{con} \quad V(x) = \frac{1}{8} x^8 - \frac{1}{2} x^6 - x^4.$$

Studiamo la funzione  $V(x)$ . Si può scrivere  $V(x) = x^4 \left( \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{2} x^2 - 1 \right)$

$$V'(x) = x^7 - 3x^5 - 4x^3 = x^3(x^4 - 3x^2 - 4), \quad V''(x) = 7x^6 - 15x^4 - 12x^2 = x^2(7x^4 - 15x^2 - 12).$$

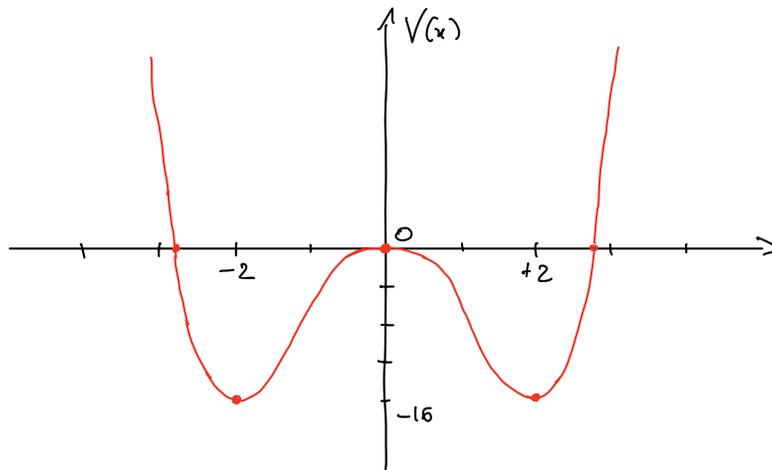
Quindi si ricava che:

$$V(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 0, \sqrt{2(2+\sqrt{3})}, -\sqrt{2(2+\sqrt{3})} \right\}$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{ 0, 2, -2 \}$$

Il punto  $x_1 = 0$  è un punto di massimo locale degenere ( $V''(0) = 0$ ) con  $V(0) = 0$ .

I punti  $x_{2,3} = \pm 2$  sono punti di minimo assoluto con  $V'' > 0$  e  $V(\pm 2) = -16$ .



Punti fissi. Si ricava quindi che il sistema ha tre punti critici:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (2, 0), \quad P_3 = (-2, 0).$$

Inoltre  $P_1$  è un punto di sella (ma non iperbolico), mentre  $P_2$  e  $P_3$  sono centri.

Simmetrie. Se  $(x(t), y(t))$  è soluzione del sistema sono soluzioni anche:

$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (x(-t), -y(-t))$  (come in ogni sistema hamiltoniano meccanico) e

$(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (-x(-t), y(-t))$  (poiché  $V(x) = V(-x)$  e quindi  $V'(-x) = -V'(x)$ ).

Ritratto di fase. La funzione hamiltoniana è un integrale primo del sistema, quindi

le orbite sono contenute negli insiemi di livello  $\{H_\mu(x, y) = c\}$ . In particolare

l'insieme di livello  $\{H_\mu(x, y) = H_\mu(0, 0)\}$  contiene  $P_2$  e le sue varietà stabile e instabile.

Si tratta dell'insieme di soluzioni di

$$\frac{1}{2}\mu y^2 + V(x) = 0 \iff y^2 = -\frac{2}{\mu} V(x)$$

che è compreso nella striscia  $\{-\sqrt{2(1+\sqrt{3})} \leq x \leq \sqrt{2(1+\sqrt{3})}\}$  ed è formato da  $P_2$  e da due orbite omocline a  $P_2$ .

Studiamo l'effetto del parametro  $\mu \in (0, +\infty)$ . Consideriamo le orbite dei punti della

forca  $(0, y_0)$  con  $y_0 \neq 0$ . Queste orbite sono esterne alle orbite omocline a  $P_2$ , sono

limitate ed intersecano l'asse  $x$  nei punti  $(\pm x_\mu(y_0), 0)$ . Usando la funzione hamiltoniana

l'orbite di  $(0, y_0)$  è l'insieme di livello  $\{H_\mu(x, y) = H_\mu(0, y_0)\}$ , dunque le soluzioni di

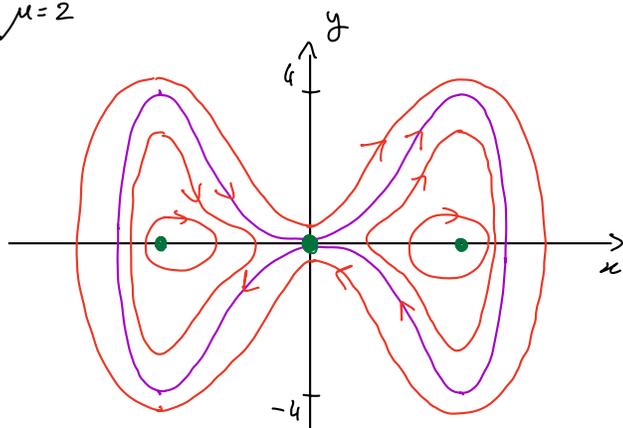
$$y^2 = y_0^2 - \frac{2}{\mu} V(x),$$

e il valore  $x_\mu(y_0)$  soddisfa  $V(x_\mu(y_0)) = \frac{\mu}{2} y_0^2$ .

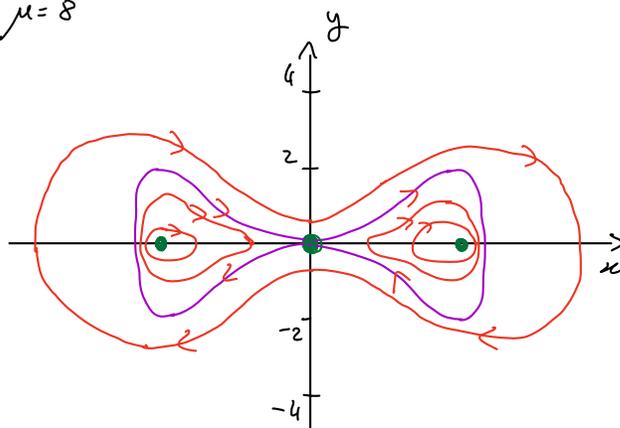
Quindi al crescere di  $\mu$  si ha che l'orbite si schiaccia sull'asse  $x$  e

$V(x_\mu(y_0)) \xrightarrow{\mu \rightarrow +\infty} +\infty$ , e quindi  $x_\mu(y_0) \xrightarrow{\mu \rightarrow +\infty} +\infty$ .

$\mu = 2$



$\mu = 8$



(b)

L'orbita di  $(z, z)$  è l'insieme di livello  $\{H_\mu(x, y) = H_\mu(z, z)\}$ , le soluzioni di

$$\frac{1}{2} \mu y^2 + V(x) = z\mu - 16$$

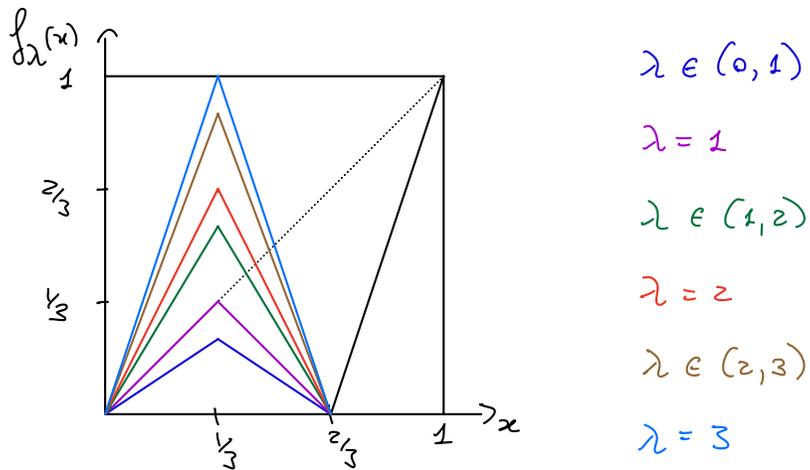
Dal ritratto di fase si ricava che  $x(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$  se l'orbita è interna all'orbita omoclina e  $\mathbb{P}_1$ , quindi se  $H_\mu(z, z) < H_\mu(0, 0) \Leftrightarrow z\mu - 16 < 0 \Leftrightarrow \mu < 8$ .

Quindi  $\mu^* = 8$ .

ESERCIZIO  
3

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & x \in J_1 = [0, \frac{1}{3}], \\ \lambda \left(\frac{2}{3} - x\right), & x \in J_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 3x - 2, & x \in J_3 = [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases} \quad \lambda \in (0, 3].$$

Disegniamo innanzitutto il grafico di  $f_\lambda$  per alcuni valori di  $\lambda$ .



(a)

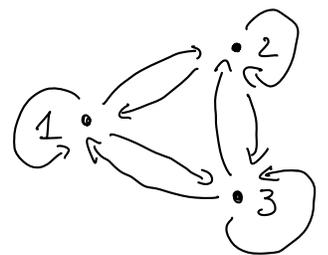
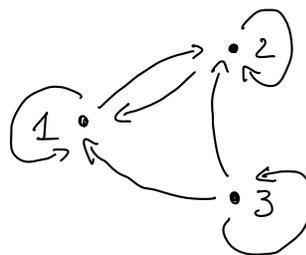
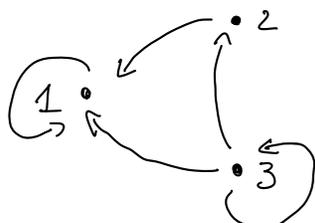
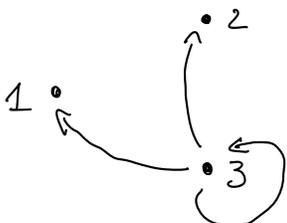
Usiamo le informazioni derivanti dal grafico di  $f_\lambda$  per costruire il grafico al reverse di  $\lambda$ .

$\lambda \in (0, 1)$

$\lambda \in [1, 2)$

$\lambda \in [2, 3)$

$\lambda = 3$



(b) Per  $\lambda \geq 2$  osserviamo che nel grafo  $\bar{\tau}$  è presente il sotto-grafo



da cui possiamo ricavare che il cammino  $T_2 T_2 T_2 T_2$  è ammissibile e chiuso, quindi  $\exists x \in T_2$  t.c.  $f^3(x) = x$ ,  $f(x) \in T_1$ ,  $f^2(x) \in T_2$ . Quindi  $x$  è un punto fisso o un punto periodico di periodo minimo 3.

Se  $x$  fosse fisso, dovrebbe essere  $x = f(x) = f^2(x) \in T_1 \cap T_2$ , quindi  $x = \frac{1}{3}$ . Poiché  $f_2(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{3} \forall \lambda \geq 2$ , otteniamo che  $f_2$  ha un'orbita periodica di periodo minimo 3  $\forall \lambda \geq 2$ . Questa condizione implica l'esistenza di un fuoco di cavallo per  $f_2^2$ , e quindi la coesistenza di  $f_2 \forall \lambda \geq 2$ .

(c) Restringiamoci ai casi  $\lambda \in [\sqrt{2}, 2]$ . Dal grafico di  $f_2$ , e dall' $f_2$ -grafo, si deduce che  $\forall x \in T_2 \setminus \{1\} \exists \bar{m}(x)$  t.c.  $f_2^{\bar{m}(x)} \in T_1 \cup T_2$ .

Studiamo quindi la dinamica di  $f_2|_{T_1 \cup T_2}$ . Per ogni  $\lambda > 1$ , ci sono due punti fissi,  $x_0 = 0$  e  $x_2 = \frac{2\lambda}{3(1+\lambda)}$ . Inoltre esiste  $y \in T_2$  t.c.  $f_2(y) = x_2$ , e si trova  $y = \frac{2}{3(1+\lambda)}$ .

Mostriamo che l'intervallo  $J = [y, x_2] = [\frac{2}{3(1+\lambda)}, \frac{2\lambda}{3(1+\lambda)}]$  ricopre sé stesso due volte rispetto a  $f_2^2$ ,  $\forall \lambda \in [\sqrt{2}, 2]$ .

È sufficiente osservare che  $x_2 = f_2^2(x_2) = f_2^2(y)$  e mostrare che  $f_2^2(\frac{1}{3}) \leq y$ .

Abbiamo che per  $\lambda \in [1, 2]$

$$f_2^2\left(\frac{1}{3}\right) = f_2\left(\frac{2}{3}\right) = \lambda\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \leq \frac{2}{3(1+\lambda)} = y \iff$$

$$(2\lambda - \lambda^2)(1+\lambda) \leq 2 \iff \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 2 \geq 0 \iff$$

$$(\lambda^2 - 2)(\lambda - 1) \geq 0 \iff \lambda \in [\sqrt{2}, 2]$$

Osserviamo anche che  $\forall \lambda \in (0, 2] \exists \varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \frac{2}{3}]$ ,  $\varphi(x) = \frac{2}{3}x$ , t.c.

$f_2 \circ \varphi = \varphi \circ T_2$ , dove  $T_2(x)$  è la mappa tent. Dunque, poiché  $T_2$  è coattica  $\forall \lambda \in (1, 2]$  e non è coattica  $\forall \lambda \in (0, 1]$ , lo stesso vale per  $f_2$ .