

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 24-06-2025

Esercizio 1. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x(y^3 + y) \\ \dot{y} = x^2 + 2y - \mu \end{cases}$$

al variare del parametro $\mu \geq 0$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + \mu)x - (2x + y)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = y + (x - 2y)(x^2 + y^2) \end{cases}$$

- (a) Disegnare il ritratto di fase nel caso $\mu = 0$.
- (b) Determinare l'esistenza di un valore $\mu_0 > 0$ tale che per ogni $\mu \in (0, \mu_0)$ il sistema ammetta un'orbita periodica.
- (c) Disegnare il ritratto di fase nel caso $\mu \in (0, \mu_0)$.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la famiglia di funzioni continue $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & x \in J_1 = [0, \frac{1}{2}] \\ \lambda(1 - x), & x \in J_2 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (4 - \lambda)x + \lambda - 3, & x \in J_3 = [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in (0, 2]$.

- (a) Determinare esistenza e stabilità dei punti fissi al variare di λ .
- (b) Per $\lambda = \frac{3}{2}$, studiare l'esistenza di punti periodici di periodo minimo 2. Cosa si può dire sulla stabilità di eventuali punti periodici per $\lambda \in (1, 2]$?
- (c) Per $\lambda = 2$, dire se il sistema dinamico è caotico.

ESERCIZIO

1

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x(y^3 + y) \\ \dot{y} = x^2 + 2y - \mu \end{cases}, \mu \in [0, +\infty)$$

- Identifichiamo i punti fissi del sistema, soluzioni di:

$$\begin{cases} 3x(y^3 + y) = 0 \\ x^2 + 2y - \mu = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si trova $x=0$ oppure $y=0$. Sostituendo nella seconda, si trova che i punti fissi sono:

- se $\mu=0$, $P=(0,0)$;

- se $\mu>0$, $P_1=(0, \frac{\mu}{2})$, $P_2=(\sqrt{\mu}, 0)$, $P_3=(-\sqrt{\mu}, 0)$

- Rette invarianti. Per ogni $\mu \geq 0$, l'asse y è invariante, infatti ponendo

$$I(x,y)=x, \text{ si ha } \nabla I(x,y) = (1,0) \neq (0,0) \quad \forall (x,y), \text{ e}$$

$$\dot{I}|_{I=0} = \dot{x}|_{x=0} \equiv 0.$$

- Simmetria. Per ogni $\mu \geq 0$, il sistema è simmetrico rispetto all'asse y .

Se poniamo $S(x,y)=(-x,y)$, si ha

$$dS(F(x,y)) = (-3x(y^3+y), x^2+2y-\mu) = F(S(x,y))$$

Quindi, se $(x(t), y(t))$ è soluzione del sistema, lo è anche

$$\underline{(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(t), y(t))}$$

- Ritratto di fase. Consideriamo separatamente il caso $\mu>0$ e il caso $\mu=0$.

(i) $\mu>0$ Studiamo la stabilità dei punti fissi.

$$JF(P) = \begin{pmatrix} 3(y^3+y) & 3x(3y^2+1) \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

- $P_1=(0, \frac{\mu}{2})$. Si ha $JF(P_1) = \begin{pmatrix} 3\frac{\mu}{2}(\frac{\mu^2}{4}+1) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e, per $\mu>0$,

Entrambi gli autovalori sono positivi. Quindi P_1 è un punto fisso iperbolico di tipo nodo (o stella) instabile.

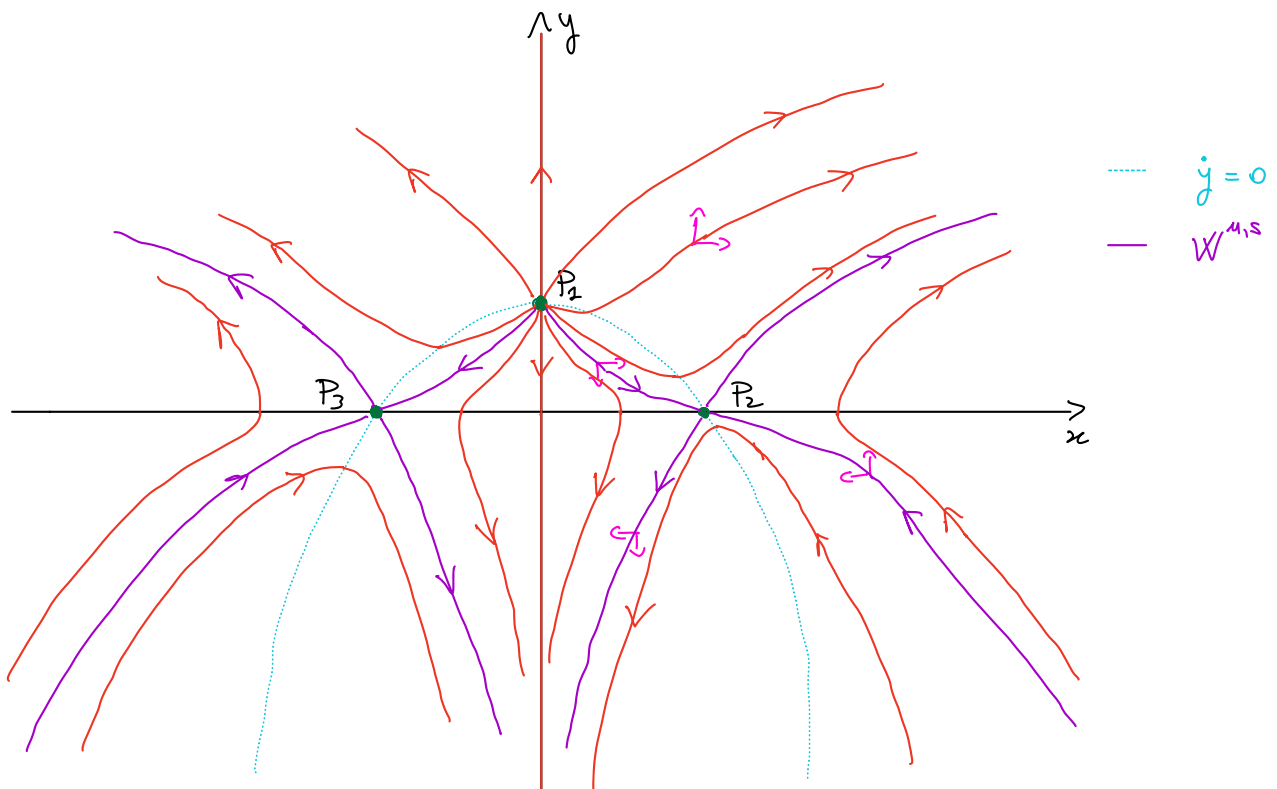
- $P_2 = (\sqrt{\mu}, 0)$. Si ha $JF(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 3\sqrt{\mu} \\ 2\sqrt{\mu} & 2 \end{pmatrix}$.

Poiché $\det JF(P_2) = -6\mu < 0$, P_2 è un punto fisso iperbolico di tipo sella. Per essere più precisi, i due autovalori di $JF(P_2)$ sono $\lambda_+ = 1 + \sqrt{6\mu + 1}$ e $\lambda_- = 1 - \sqrt{6\mu + 1}$, con autovettori $v_{\pm} = \left(1, \frac{\lambda_{\pm}}{3\sqrt{\mu}}\right)$

- $P_3 = (-\sqrt{\mu}, 0)$. Si ha $JF(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt{\mu} \\ -2\sqrt{\mu} & 2 \end{pmatrix}$, e valgono le stesse conclusioni di P_2 (ricordiamo la simmetria del sistema).

Possiamo anche concludere che il sistema non ammette orbite periodiche. Infatti, per le teorie dell'indice di Poincaré, un'orbita periodica dovrebbe racchiudere P_1 . Ma $P_1 \in \{x=0\}$, insieme invariante, e per l'unicità locale delle soluzioni, non è possibile avere orbite chiuse che racchiudano P_1 .

Usiamo il segno del tempo per disegnare il ritratto di fase.



(ii) $\mu = 0$

Studiamo la stabilità dei punti fissi.

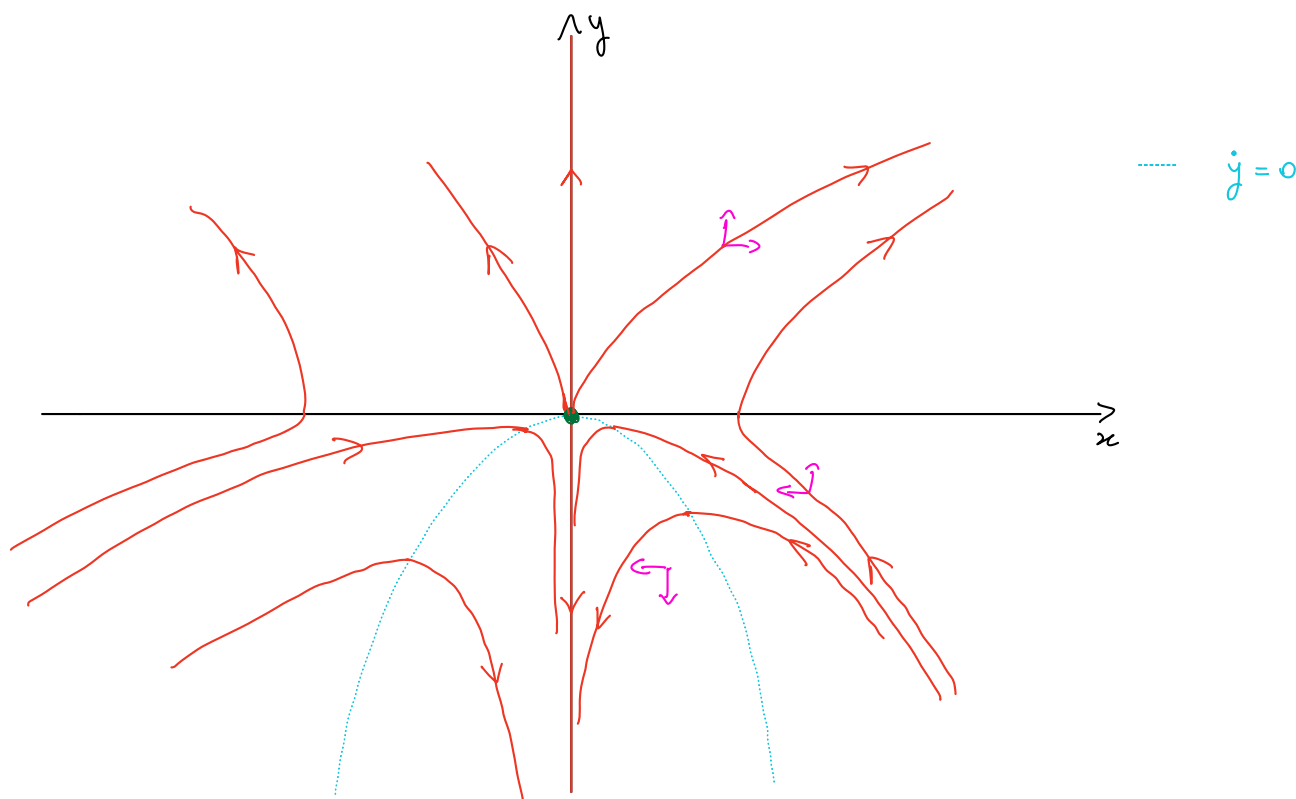
$$JF(P) = \begin{pmatrix} 3(y^3 + y) & 3x(3y^2 + 1) \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

- $P = (0, 0)$. Si ha $JF(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, e quindi P è un punto

fisso non iperbolico. Tuttavia, poiché uno degli autovalori di $JF(P)$ è positivo, il punto P è instabile.

Anche in questo caso la Teoria dell'indice di Poincaré garantisce che non ci sono orbite periodiche.

Usiamo il segno del campo per disegnare il ritratto di fase.



ESERCIZIO

2

$$\begin{cases} \dot{x} = (1+\mu)x - (2x+y)(x^2+y^2) \\ \dot{y} = y + (x-2y)(x^2+y^2) \end{cases}$$

Descriviamo il sistema in coordinate polari (ρ, θ) .

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho} (x\dot{x} + y\dot{y}) \Big|_{\substack{x=\rho \cos \vartheta \\ y=\rho \sin \vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \left[(1+\mu)x^2 - (2x^2 + xy)(x^2 + y^2) + y^2 + (xy - 2y^2)(x^2 + y^2) \right] \Big|_{\substack{x=\rho \cos \vartheta \\ y=\rho \sin \vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \left[x^2 + y^2 + \mu x^2 - 2(x^2 + y^2)^2 \right] \Big|_{\substack{x=\rho \cos \vartheta \\ y=\rho \sin \vartheta}} =$$

$$= \rho + \mu \rho \cos^2 \vartheta - 2\rho^3$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{\rho^2} (x\dot{y} - y\dot{x}) \Big|_{\substack{x=\rho \cos \vartheta \\ y=\rho \sin \vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho^2} \left[xy + (x^2 - 2xy)(x^2 + y^2) - (1+\mu)xy + (2xy + y^2)(x^2 + y^2) \right] \Big|_{\substack{x=\rho \cos \vartheta \\ y=\rho \sin \vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho^2} \left[-\mu xy + (x^2 + y^2)^2 \right] \Big|_{\substack{x=\rho \cos \vartheta \\ y=\rho \sin \vartheta}} =$$

$$= -\mu \cos \vartheta \sin \vartheta + \rho^2$$

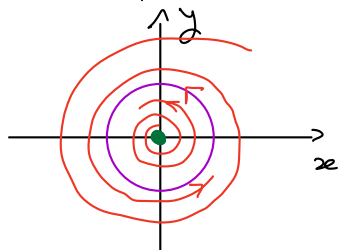
(a) Per $\mu=0$, il sistema in coordinate polari è

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho - 2\rho^3 \\ \dot{\vartheta} = \rho^2 \end{cases}$$

L'unico punto fisso è $P=(0,0)$ in coordinate eucleree, e poiché

$\dot{\rho}|_{\rho=\sqrt{\frac{1}{2}}} = 0$, c'è un'orbita periodica data da $\Gamma = \{x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\}$.

Inoltre, $\dot{\rho} > 0$ se $\rho \in (0, \sqrt{\frac{1}{2}})$ e $\dot{\rho} < 0$ se $\rho > \sqrt{\frac{1}{2}}$. Il sistema si fase in coordinate eucleree è quindi



— Γ

(b) Per $\mu > 0$, il sistema in coordinate polari è

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 + \mu \cos^2 \vartheta) - 2\rho^3 \\ \dot{\vartheta} = \rho^2 - \mu \cos \vartheta \sin \vartheta \end{cases}$$

Cerchiamo $\mu_0 > 0$ per cui possiamo applicare il Teorema di Poincaré-Bendixson per ogni $\mu \in (0, \mu_0)$.

Studiamo quindi l'esistenza di punti fissi diversi dall'origine. Un tale punto fisso deve soddisfare $\rho^2 = \frac{1}{2}(1 + \mu \cos^2 \vartheta)$ e $\rho^2 = \mu \cos \vartheta \sin \vartheta$. Quindi o bene

$$\frac{1}{2}(1 + \mu \cos^2 \vartheta) = \mu \cos \vartheta \sin \vartheta$$

Per $\mu > 0$, $\mu \cos \vartheta \sin \vartheta = \frac{1}{2} \mu \sin(2\vartheta) \leq \frac{1}{2} \mu$ e $\frac{1}{2}(1 + \mu \cos^2 \vartheta) \geq \frac{1}{2}$,

quindi se $\mu \in (0, 1)$, non ci possono essere punti fissi diversi dall'origine.

Poniamo ora $D_\mu = \{(\rho, \vartheta) / \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1\}$ con $\rho_1 > \rho_0 > 0$. Determiniamo l'esistenza di $\rho_0 = \rho_0(\mu)$ e $\rho_1 = \rho_1(\mu)$ in modo che $\dot{\rho}|_{\rho_0} > 0$ e $\dot{\rho}|_{\rho_1} < 0$.

$$\dot{\rho}|_{\rho_0} = \rho_0(1 + \mu \cos^2 \vartheta) - 2\rho_0^3 \geq \rho_0(1 - 2\rho_0^2) > 0 \text{ se } \rho_0 < \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

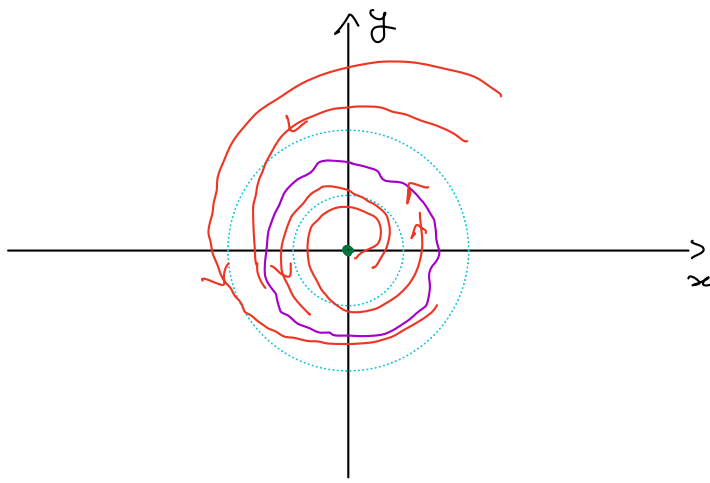
$$\dot{\rho}|_{\rho_1} = \rho_1(1 + \mu \cos^2 \vartheta) - 2\rho_1^3 \leq \rho_1(1 + \mu) - 2\rho_1^3 = \rho_1(1 + \mu - 2\rho_1^2) < 0 \text{ se } \rho_1 > \sqrt{\frac{1+\mu}{2}}$$

Se dunque $\mu_0 = 1$, Per ogni $\mu \in (0, 1)$ poniamo $\rho_0(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\rho_1(\mu) = \sqrt{\frac{1+\mu}{2}}$,

l'insieme $D_\mu = \{(\rho, \vartheta) / \rho_0(\mu) \leq \rho \leq \rho_1(\mu)\}$ soddisfa le ipotesi del Teorema di

Poincaré-Bendixson, e quindi contiene un'orbita periodica Γ_μ che è l' ω -limite di ogni punto di D_μ .

(c) Fissato $\mu \in (0, 1)$, il risultato di fase sarà quindi



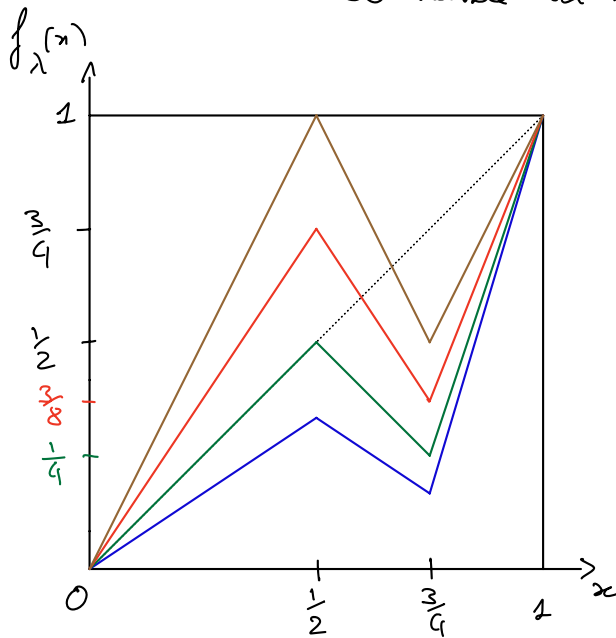
$$\cdots \rho = \rho_0(\mu), \rho_2(\mu)$$

$$- \mu$$

ESERCIZIO
3

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & \text{se } x \in J_1 = [0, \frac{1}{2}] \\ \lambda(1-x), & \text{se } x \in J_2 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (4-\lambda)x + \lambda - 3, & \text{se } x \in J_3 = [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in (0, 2]$



$$\lambda \in (0, 1)$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda = \frac{3}{2}$$

$$\lambda = 2$$

(a) Come si vede dal grafico, ci aspettiamo diversi comportamenti al variare di λ .

Ci sono due punti fissi che esistono per ogni $\lambda \in (0, 2]$:

$$\underline{x_1 = 0, \quad x_2 = 1.}$$

Per $\lambda < 1$, non ci sono altri punti fissi.

Per $\lambda = 1$, sono punti fissi anche tutti i punti del segmento $[0, \frac{1}{2}]$.

Per $\lambda > 1$, c'è un punto fisso x_3 anche in J_2 (non può essere in J_3)

perché $(\lambda \cdot (1 - \frac{3}{4})) = \frac{\lambda}{4} < \frac{3}{4}$ per ogni $\lambda \in (0, 2]$. Si trova

$$\underline{x_3 = \frac{\lambda}{1+\lambda}}$$

Studiamo la stabilità dei punti fissi (il caso $\lambda=1$ è a parte)

• $x_1 = 0$. Si ha $|f'_\lambda(0)| = |\lambda|$, quindi:

- se $\lambda \in (0, 1)$, x_1 è attrattivo;

- se $\lambda \in (1, 2]$, x_1 è repulsivo.

• $x_2 = 1$. Si ha $|f'_\lambda(1)| = |4 - \lambda| = 4 - \lambda \geq 2$ per ogni $\lambda \in (0, 2]$. Quindi x_2 è repulsivo $\forall \lambda \in (0, 2]$.

• $x_3 = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ per $\lambda \in (1, 2]$. Si ha $|f'_\lambda(\frac{\lambda}{1+\lambda})| = |\lambda| > 1$ per $\lambda \in (1, 2]$, quindi x_3 è repulsivo $\forall \lambda \in (1, 2]$.

Infine, per $\lambda=1$, il segmento $[0, \frac{1}{2}]$ è composto di punti fissi che non sono iperbolici, e sono stabili ma non attrattivi.

(b) Poniamo $\lambda = \frac{3}{2}$ e determiniamo $f^2_{\frac{3}{2}}$ (indicate come f^2).

• Se $x \in J_1$, si ha $f(x) = \frac{3}{2}x$. Quindi $f([0, \frac{1}{3}]) = [0, \frac{1}{2}] = J_1$ e $f([\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] = J_2$. Quindi

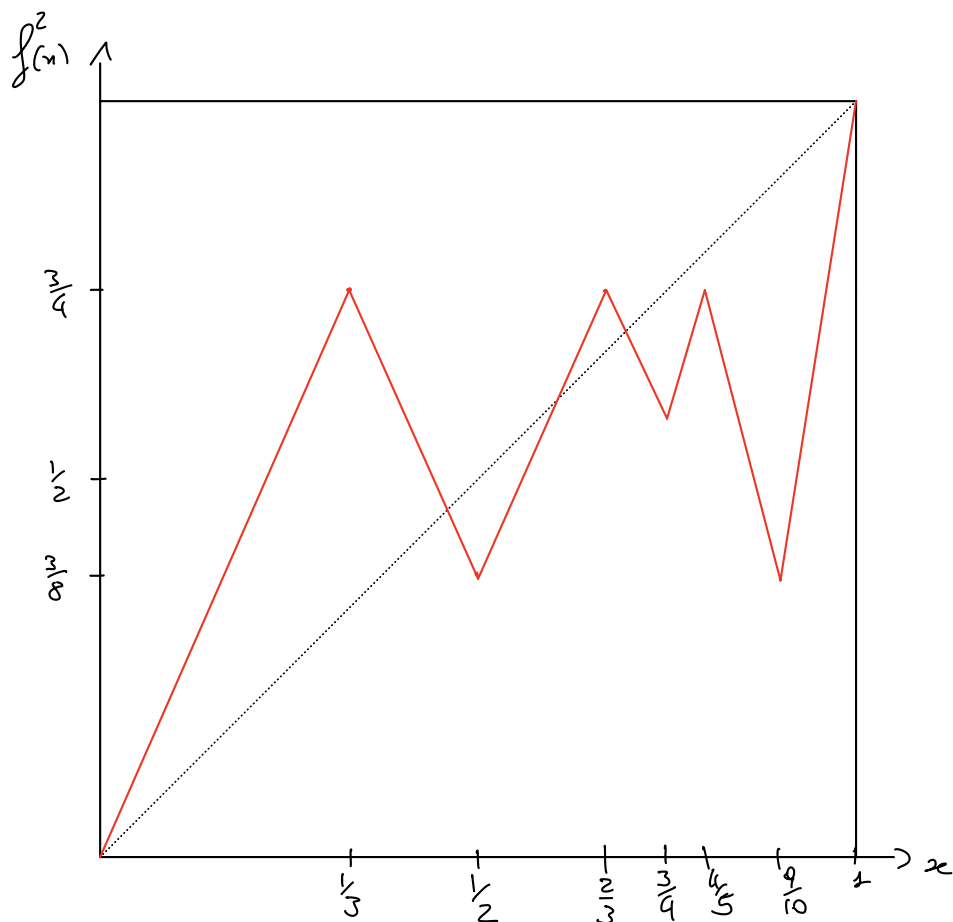
$$f^2(x) = \begin{cases} \frac{9}{4}x, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{3}{2}(1 - \frac{3}{2}x), & \text{se } x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

• Se $x \in J_2$, si ha $f(x) = \frac{3}{2}(1-x)$. Quindi $f([\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] = J_2$, e $f([\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]) = [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}] \subset J_1$. Quindi

$$f^2(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - \frac{3}{2}(1-x)) = \frac{3}{4}(3x-1), & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \\ \frac{9}{4}(1-x), & \text{se } x \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}] \end{cases}$$

• Se $x \in J_3$, si ha $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$. Quindi $f([\frac{3}{4}, \frac{4}{5}]) = [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}] \subset J_1$, $f([\frac{4}{5}, \frac{9}{10}]) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] = J_2$, e $f([\frac{9}{10}, 1]) = [\frac{3}{4}, 1] = J_3$. Quindi

$$f^2(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(5x-3), & \text{se } x \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{5}] \\ \frac{3}{2}(1 - (\frac{5}{2}x - \frac{3}{2})) = \frac{15}{4}(1-x), & \text{se } x \in [\frac{4}{5}, \frac{9}{10}] \\ \frac{5}{2}(\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}) - \frac{3}{2} = \frac{25}{4}x - \frac{21}{4}, & \text{se } x \in [\frac{9}{10}, 1] \end{cases}$$



Possiamo ricavare, dal grafico di f^2 , che esiste un'unica orbita periodica di periodo minimo 2. I punti dell'orbita sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} f^2(x) = x \\ f(x) \neq x \end{cases}$.

Uno è la soluzione di $\frac{3}{2}(1 - \frac{3}{2}x) = x$ che è $x = \frac{6}{13}$, e l'altro è la soluzione di $\frac{9}{4}(1-x) = x$ che è $x = \frac{9}{13}$ (oppure $f(\frac{6}{13})$).

Supponiamo ora $\lambda \in (1, 2]$. Poiché $\min_{x \in [0,1]} |f_2'(x)| = \min \{ \lambda, 4-\lambda \} = \lambda$, se x è un punto periodico di periodo minimo p , si ha

$$|(f_2^p)'(x)| = \prod_{j=0}^{p-1} |f_2'(f_2^j(x))| \geq (\min_{[0,1]} |f_2'|)^p = \lambda^p > 1$$

Quindi il punto periodico x sarebbe repulsivo.

(c)

Per $\lambda = 2$, si ha $f_2(I_2) = f_2(I_3) = [\frac{1}{2}, 1] = I_2 \cup I_3$. Quindi $I = [\frac{1}{2}, 1]$ ricopre se stesso due volte, e dunque f_2 ha un ferro di cavallo ed è caotico.