Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Test del 24-06-2021

Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x\Big(\mu - \sin(x+y)\Big) \\ \dot{y} = -\cos(x+y) \end{cases}$$

per $(x, y) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ e al variare del parametro $\mu \in (0, +\infty)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = (\mu - \sin(x+y))\, x \\ \dot{y} = -\cos(x+y) \end{cases} \qquad \mu > 0, \qquad (x,y) \in (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi)$$

<u>OSS</u> $\cos(x+y) = 0 \Rightarrow \sin(x+y) = \pm 1$

$\boxed{\mu \in (0,1)}$ <u>Punti fissi</u>

$$\begin{cases} x(\mu - \sin(x+y)) = 0 \\ \cos(x+y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(\mu \pm 1) = 0 \\ \cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Punti fissi} = \{ \overset{P_1}{(0, -\tfrac{\pi}{2})}, \ \overset{P_2}{(0, +\tfrac{\pi}{2})} \}$$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} \mu - \sin(x+y) - x\cos(x+y) & -x\cos(x+y) \\ \sin(x+y) & \sin(x+y) \end{pmatrix}$$

$$JF(0, -\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \mu+1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Autovalori} = \{ \mu+1, \ -1 \}$$

$$\text{Autovettori} = \left\{ \begin{pmatrix} -(\mu+2) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

P_1 è punto di sella

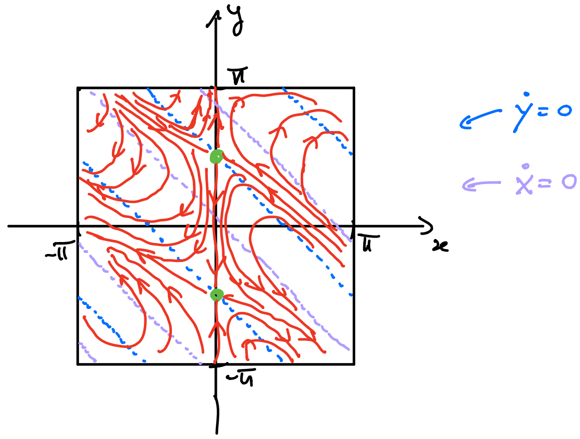
$$JF(0, +\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \mu-1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Autovalori} = \{ \mu-1, \ 1 \}$$

$$\text{Autovettori} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu-2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

P_2 è punto di sella

<u>Insiemi invarianti</u> $\{x = 0\}$

Infatti $I(x,y) = x$ verifica $\dot{I}(x,y)\big|_{\{x=0\}} = \dot{x}\big|_{\{x=0\}} = 0$.



Orbite periodiche Non esistono per la Teoria dell'indice

Simmetrie Non ce ne sono di immediate

$\boxed{\mu > 1}$

Punti fissi $= \{ \overset{P_1}{(0, -\frac{\pi}{2})}, \overset{P_2}{(0, +\frac{\pi}{2})} \}$

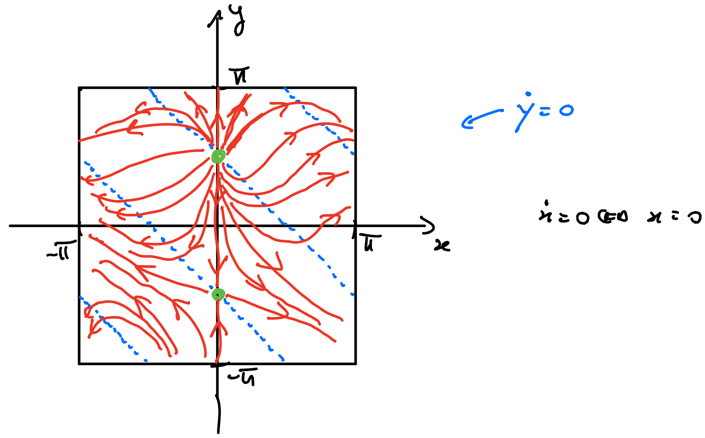
$JF(0, -\frac{\pi}{2})$ ha autovalori $= \{\mu+1, -1\}$ e autovettori come prima.

P_1 è punto di sella

$JF(0, \frac{\pi}{2})$ ha autovalori $= \{\mu-1, 1\}$, e ora $\mu-1>0$ quindi

P_2 è nodo instabile (improprio se $\mu=2$)

Insiemi invarianti $\{x=0\}$ (come prima)



<u>Orbite periodiche</u> Per la teoria dell'indice possono circondare solo P_2, ma essendoci l'insieme invariante $\{x=0\}$ non possono esistere per l'unicità locale delle soluzioni.

$\boxed{\mu = 1}$ In questo caso troviamo che i punti fissi sono l'insieme $\left\{x+y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \left\{\underbrace{\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)}_{P_1}\right\}$

Come prima, P_1 è punto di sella.