Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 24-02-2011

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x \sin y$$

i) trovare tutti i punti critici liberi, e determinare se si tratta di punti di massimo locale, di minimo locale o di sella;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 2\pi\Big\}\,;$$

Esercizio 2. (10 punti) Data la superficie $\Sigma = \sigma(D)$ di parametrizzazione

$$\sigma(u,v) = \Big(\cos v,\, \sin v,\, u\Big) \qquad \text{con} \quad D = \Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le u \le 1,\, 0 \le v \le \frac{\pi u}{2}\Big\}$$

i) dire se è una superficie regolare;

ii) scrivere l'equazione parametrica del piano tangente a Σ nel punto $P = \sigma\left(\frac{1}{2},\, \frac{\pi}{6}\right)$;

iii) calcolare l'area di Σ.

Esercizio 3. (12 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^2+y^2} \\ \frac{y}{(e^x-1)^2+y^2} \end{pmatrix}$$

i) dire se è irrotazionale;

ii) dire se è conservativo;

iii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $\gamma(t) = \Big(\sin t,\, 1+t\Big)$ con $t \in [0,\pi]$.

Svolgimento

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x\,\sin y$$

i) trovare tutti i punti critici liberi, e determinare se si tratta di punti di massimo locale, di minimo locale o di sella;

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è almeno di classe C^2.
Bisogna trovare in punti nel dominio che annullano il gradiente. Si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x\,\cos y \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$ si ottiene che sono critici tutti i punti della forma

$$P_k = (0, k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Per determinare la natura dei punti critici, calcoliamo la matrice Hessiana di f che è data da

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x\,\sin y \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(P_k) = H_f(0,k\pi) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}$$

per cui per ogni $k \in \mathbb{Z}$ il punto critico P_k è un punto di sella.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\pi \right\}.$$

La funzione f è continua su D che è un insieme compatto, quindi per il Teorema di Weierstrass esistono massimo e minimo di f ristretta a D.

Dobbiamo prendere in considerazione i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

L'unico punto critico interno a D è $P_1 = (0, \pi)$.

Per studiare i punti critici vincolati al bordo di D, dividiamo il bordo in quattro parti e usiamo le parametrizzazioni

$$\gamma_1(t) = (t,\ 0) \qquad t \in [-1,1]$$

$$\gamma_2(t) = (1,\ t) \qquad t \in [0,2\pi]$$

$$\gamma_3(t) = (t,\ 2\pi) \qquad t \in [-1,1]$$

$$\gamma_4(t) = (-1,\ t) \qquad t \in [0,2\pi]$$

Sostituiamo in f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_1(t) = f(t,0) = 0 \qquad t \in [-1,1]$$

$$g_2(t) = f(1,t) = \sin t \qquad t \in [0,2\pi]$$

$$g_3(t) = f(t, 2\pi) = 0 \qquad t \in [-1, 1]$$

$$g_4(t) = f(-1, t) = -\sin t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Le funzioni g_1 e g_3 sono costanti. La funzione g_2 ha punti critici interni al suo intervallo di definizione nei punti $t_1 = \frac{\pi}{2}$ e $t_2 = \frac{3\pi}{2}$. Troviamo dunque i due punti critici vincolati

$$Q_1 = \left(1, \frac{\pi}{2}\right), \; Q_2 = \left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$$

La funzione g_4 ha punti critici interni al suo intervallo di definizione nei punti $t_3 = \frac{\pi}{2}$ e $t_4 = \frac{3\pi}{2}$. Troviamo dunque altri due punti critici vincolati

$$Q_3 = \left(-1, \frac{\pi}{2}\right), \; Q_4 = \left(-1, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Gli spigoli del bordo sono i punti

$$S_1 = (-1, 0), \; S_2 = (1, 0), \; S_3 = (1, 2\pi), \; S_4 = (-1, 2\pi)$$

mentre non ci sono punti di non derivabilità della funzione.

Quindi in conclusione dobbiamo confrontare i valori

$$f(P_1) = 0, \; f|_{\Gamma_1} = f|_{\Gamma_3} = 0, \; f(Q_1) = 1, \; f(Q_2) = -1, \; f(Q_3) = -1, \; f(Q_4) = 1$$

$$f(S_1) = 0, \; f(S_2) = 0, \; f(S_3) = 0, \; f(S_4) = 0$$

e concludiamo

$$\max_D f = 1, \quad \min_D f = -1$$

Esercizio 2. (10 punti) Data la superficie $\Sigma = \sigma(D)$ di parametrizzazione

$$\sigma(u, v) = \Big(\cos v, \, \sin v, \, u\Big) \qquad \text{con} \quad D = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 0 \le u \le 1, \, 0 \le v \le \frac{\pi u}{2}\right\}$$

i) dire se è una superficie regolare;

La parametrizzazione $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ è una funzione di classe C^1 e iniettiva nella parte interna di D. Rimane da calcolare il rango della matrice Jacobiana di σ, che è data da

$$J_\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin v \\ 0 & \cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I determinanti delle matrici 2×2 sono $A(u, v) = -\cos v$, $B(u, v) = \sin v$ e $C(u, v) = 0$. Si vede che allora per ogni (u, v) nella parte interna di D il rango di $J_\sigma(u, v)$ è due, perché non si annullano mai contemporaneamente A, B e C.

La superficie è quindi regolare.

ii) scrivere l'equazione parametrica del piano tangente a Σ nel punto $P = \sigma\left(\frac{1}{2}, \, \frac{\pi}{6}\right)$;

Il punto P è regolare per Σ, quindi il piano tangente è generato dai vettori $w_1 = \sigma_u(u_0, v_0)$ e $w_2 = \sigma_v(u_0, v_0)$ dati dalle due colonne della matrice $J_\sigma(u_0, v_0)$ con $P = \sigma(u_0, v_0)$. Dalla definizione di P abbiamo $(u_0, v_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ e l'equazione parametrica del piano tangente è

$$\{P + \lambda\, w_1 + \mu\, w_2 \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

iii) calcolare l'area di Σ.

Sia $n(u,v) = \sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u_0, v_0)$ il vettore normale alla superficie, dato dal prodotto vettoriale delle due colonne della matrice $J_\sigma(u,v)$. Si trova

$$n(u,v) = \begin{pmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

e vale

$$Area(\Sigma) = \iint_D \|n(u,v)\|\, dudv = \iint_D 1\, dudv = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi u}{2}} 1\, dv \right) du = \int_0^1 \frac{\pi u}{2}\, du = \left(\frac{\pi u^2}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 3. (12 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^2+y^2} \\ \frac{y}{(e^x-1)^2+y^2} \end{pmatrix}$$

i) dire se è irrotazionale;

Per un campo di vettori in $\mathbb{R}^2$ si ha

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{2\, e^x(e^x-1)\, y}{((e^x-1)^2+y^2)^2} + \frac{2\, e^x(e^x-1)\, y}{((e^x-1)^2+y^2)^2} = 0$$

Quindi il campo è irrotazionale.

ii) dire se è conservativo;

Il dominio di $\mathbf{F}$ è l'insieme

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

che non è semplicemente connesso. Dobbiamo quindi studiare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una curva chiusa intorno all'origine. Per semplificare i calcoli scegliamo la curva

$$\gamma(t) = \left(\log\left(1 + \frac{1}{2}\cos t\right),\ \frac{1}{2}\sin t \right) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

disegnata nella figura 1. Si ottiene dalla formula

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \int_0^{2\pi} < \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) > \, dt = \int_0^{2\pi} 4 \left[-\frac{1}{4}\sin t\, \cos t + \frac{1}{4}\sin t\, \cos t \right] dt = 0$$

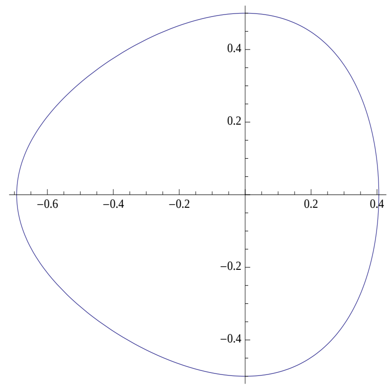

Figure 1: Il sostegno della curva γ.

Quindi il campo è conservativo.

iii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $\gamma(t) = \Big(\sin t,\, 1+t\Big)$ con $t \in [0,\pi]$.

Il campo è conservativo, quindi per calcolare il lavoro ci basta conoscere un potenziale $f(x,y)$ di $\mathbf{F}$ per ottenere

$$L(\mathbf{F},\gamma) = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = f(0,1+\pi) - f(0,1)$$

Cerchiamo allora un potenziale di $\mathbf{F}$. Fissiamo il punto $P_0 = (1,0)$ e un punto generico $P = (x,y) \in \Omega$. Se $x > 0$ scegliamo la curva $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ con

$$\tilde{\gamma}_1(t) = (1-t+tx, 0) \qquad t \in [0,1] \qquad \text{e} \qquad \tilde{\gamma}_2(t) = (x, ty) \qquad t \in [0,1]$$

per cui

$$\tilde{\gamma}_1'(t) = \begin{pmatrix} -1+x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \tilde{\gamma}_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

e poniamo

$$f(x,y) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}_1) + L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}_2)$$

Si ha

$$L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}_1) = \int_0^1 \left(\frac{e^{(1-t+tx)}}{(e^{(1-t+tx)}-1)}\,(-1+x) \right) dt = \Big(\log|e^{(1-t+tx)}-1| \Big)\Big|_0^1 = \log(e^x-1) - \log(e-1)$$

$$L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}_2) = \int_0^1 \left(\frac{ty}{(e^x-1)^2 + t^2y^2}\,y \right) dt = \Big(\frac{1}{2}\log|(e^x-1)^2 + t^2y^2| \Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\log\Big((e^x-1)^2 + y^2\Big) - \log(e^x-1)$$

e dunque

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\log\Big((e^x-1)^2 + y^2\Big) - \log(e-1)$$

è un potenziale. Il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ è quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma) = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = f(0,1+\pi) - f(0,1) = \log(1+\pi).$$