Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 23-07-2014

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + y \geq 1\,,\ y \leq 1\,, x \leq 1\right\}\ .$$

Esercizio 2. (12 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_{\Omega} \frac{xy}{x^2+y^2}\ dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,, y \leq x^3\right\}$.

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sin(x^3) + y^2 + \log(1+z^2) = 1\right\}$$

i) dire per quali di questi punti di Σ è possibile determinare l'esistenza del piano tangente a Σ:

$$P = \begin{pmatrix} (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} \pi^{\frac{1}{3}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \pi^{\frac{1}{3}} \\ 0 \\ -\sqrt{e-1} \end{pmatrix}$$

ii) per i punti P, Q, R, nell'intorno dei quali è possibile trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione, usare la parametrizzazione per trovare i vettori che generano il piano tangente a Σ.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $x = y$, e sostituendo nella prima otteniamo

$$6x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0,1\} \ .$$

Dunque i punti critici di f sono

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Per caratterizzarli andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione anche di classe C^2 su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} .$$

Calcoliamo ora la matrice Hessiana in P_1:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} ,$$

e si ha $\det Hf(0,0) = -36 < 0$. Dunque P_1 è un punto di sella.
Calcoliamo ora la matrice Hessiana in P_2:

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} ,$$

e si ha $\det Hf(0,0) = 36 > 0$ e traccia$Hf(0,0) = 18 > 0$. Dunque P_2 è un punto di minimo locale.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x + y \geq 1 \, , \; y \leq 1 \, , x \leq 1\right\} .$$

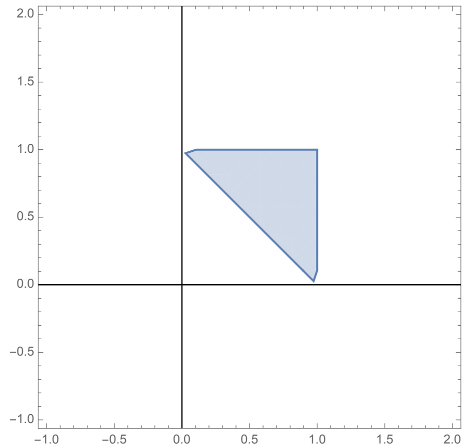

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 1.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non derivabilità, e i punti critici sono stati trovati al punto i). Entrambi però non sono interni all'insieme $\bar{\Omega}$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Parametrizziamo ora i tre segmenti del bordo. Troviamo

$$\gamma_1(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 3t^2 - 6t + 2\,, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 2t^3 - 6t + 3\,, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = 2t^3 + 9t^2 - 12t + 3\,, \qquad t \in [0,1]$$

Tutte e tre le funzioni sono sempre derivabili e gli estremi dei loro domini corrispondono agli spigoli. Dunque ci rimane di trovare i punti critici delle tre funzioni.

Abbiamo $g_1'(t) = 6t - 6$, dunque l'unico punto critico è $t_0 = 1$ che è sul bordo, quindi non va considerato. Poi $g_2'(t) = 6t^2 - 6$, dunque l'unico punto critico nel dominio è $t_0 = 1$ che è sul bordo, quindi non va considerato. Infine $g_3'(t) = 6t^2 + 18t - 12$ che ha una sola radice in $[0, 1]$ nel punto $t_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 3)$. Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q = \gamma_3\Big(\frac{1}{2}(\sqrt{17} - 3)\Big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 3) \\ \frac{1}{2}(5 - \sqrt{17}) \end{pmatrix} .$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = 2 , \quad f(S_2) = -1 , \quad f(S_3) = 3 , \quad f(Q) = \frac{1}{2}(69 - 17\sqrt{17}) ,$$

per cui il massimo di f è 3 e il minimo è -1.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{xy}{x^2 + y^2} \; dx \, dy$$

dove $\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1 \,, y \leq x^3\big\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

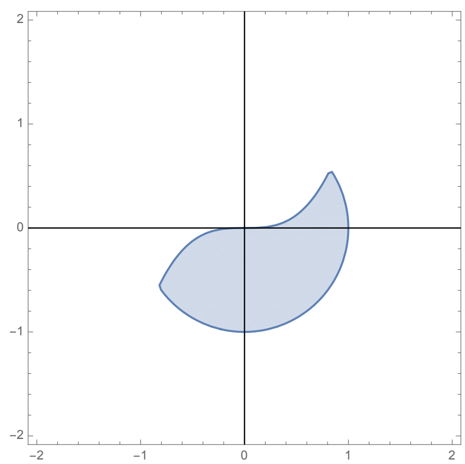

Figure 2: L'insieme Ω.

Risolviamo l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho, \theta)| = \rho \, .$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{xy}{x^2 + y^2} \; dx \, dy = \iint_S \rho \, \cos\theta \; \sin\theta \; d\rho \, d\theta \, .$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{ (\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \,:\, \rho^2 \le 1 \,,\, \rho \sin\theta \le \rho^3 \cos^3\theta \right\}$$

La prima condizione ci dice che

$$0 \le \rho \le 1$$

mentre la seconda condizione è equivalente a

$$\begin{cases} \cos\theta > 0 \\ \rho^2 \ge \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} \cos\theta < 0 \\ \rho^2 \le \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} \end{cases}$$

dove il caso $\cos\theta = 0$ lo trascuriamo perché corrisponde ad un insieme di misura nulla, dunque non è importante per l'integrale.

Risolviamo dunque i due sistemi e uniamo le soluzioni. Dal primo, cercando soluzioni di θ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, troviamo $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, per cui vediamo come si comporta la funzione $\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Troviamo il grafico in figura 3.

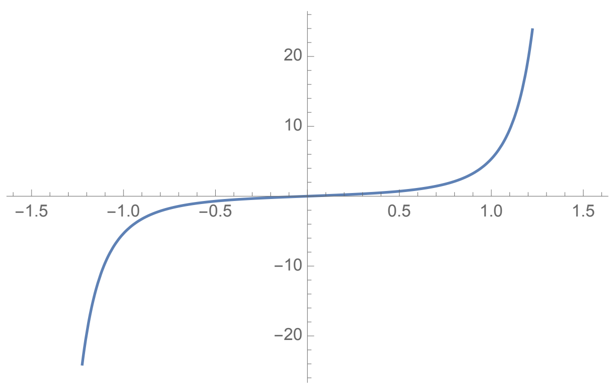

Figure 3:

Per cui, mettendo questo primo insieme di soluzioni della seconda condizione con la prima condizione $\rho \in [0, 1]$, troviamo che se $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ allora $\rho \in [0, 1]$, mentre se $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ dato θ_0 per cui

$$\frac{\sin\theta_0}{\cos^3\theta_0} = 1 \,,$$

avremo $\theta \in [0, \theta_0]$ e $\rho \in [\sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}}, 1]$.

Passiamo al secondo sistema. Troviamo $\theta \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Iniziamo ponendo $\theta \in [-\pi, -\frac{\pi}{2})$ e vediamo come si comporta la funzione $\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}$ in questo intervallo. Troviamo il grafico in figura 4.

Per cui, mettendo questo secondo insieme di soluzioni della seconda condizione con la prima condizione $\rho \in [0, 1]$, troviamo che, dato $\theta_1 \in [-\pi, -\frac{\pi}{2})$ per cui

$$\frac{\sin\theta_1}{\cos^3\theta_1} = 1 \,,$$

avremo $\theta \in [-\pi, \theta_1]$ e $\rho \in [0, \sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}}]$, unito a $\theta \in [\theta_1, -\frac{\pi}{2})$ e $\rho \in [0, 1]$.

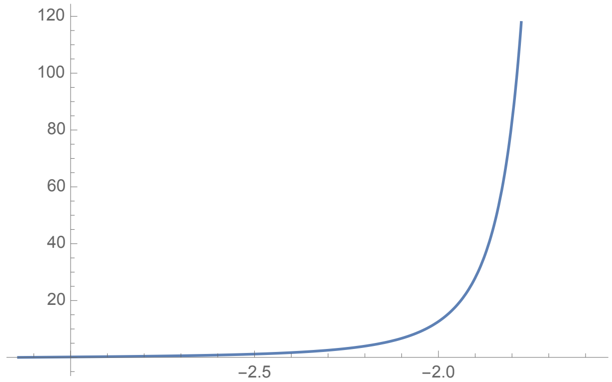

Figure 4:

Infine, per $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, osserviamo che il $\sin\theta > 0$ e $\cos^3\theta < 0$, dunque la seconda equazione del sistema non può avere soluzioni.

In definitiva possiamo mettere insieme le varie condizioni e ottenere

$$S = \left\{ -\pi \le \theta \le \theta_1 \,,\, 0 \le \rho \le \sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}} \right\} \cup \left\{ \theta_1 \le \theta \le 0 \,,\, 0 \le \rho \le 1 \right\} \cup \left\{ 0 \le \theta \le \theta_0 \,,\, \sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}} \le \rho \le 1 \right\}$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_S \rho\cos\theta\ \sin\theta\ d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\theta_1} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}}} \rho\cos\theta\ \sin\theta\ d\rho \right) d\theta + \int_{\theta_1}^{0} \left(\int_0^1 \rho\cos\theta\ \sin\theta\ d\rho \right) d\theta + \int_0^{\theta_0} \left(\int_{\sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}}}^1 \rho\cos\theta\ \sin\theta\ d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\theta_1} \frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta + \int_{\theta_1}^{0} \frac{1}{2}\cos\theta\ \sin\theta\, d\theta + \int_0^{\theta_0} \left(\frac{1}{2}\cos\theta\ \sin\theta - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tan\theta_1 - \theta_1 - \pi - \frac{1}{2}\sin^2\theta_1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta_0 - \tan\theta_0 + \theta_0 \right).$$

Si può infine osservare che vale $\theta_0 = \theta_1 + \pi$, dunque $\tan\theta_0 = \tan\theta_1$ e $\sin^2\theta_0 = \sin^2\theta_1$, e dunque il risultato dell'integrale è 0.

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sin(x^3) + y^2 + \log(1+z^2) = 1 \right\}$$

i) dire per quali di questi punti di Σ è possibile determinare l'esistenza del piano tangente a Σ:

$$P = \begin{pmatrix} (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} \pi^{\frac{1}{3}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \pi^{\frac{1}{3}} \\ 0 \\ -\sqrt{e-1} \end{pmatrix}$$

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione di classe C^1

$$F(x,y,z) = \sin(x^3) + y^2 + \log(1+z^2)$$

dunque certamente esiste il piano tangente nei punti di Σ in cui non si annulla il gradiente di F. Abbiamo

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2\ \cos(x^3) \\ 2y \\ \frac{2z}{1+z^2} \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\nabla F(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} -3\pi^{\frac{2}{3}} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla F(R) = \begin{pmatrix} -3\pi^{\frac{2}{3}} \\ 0 \\ -\frac{2}{e}\sqrt{e-1} \end{pmatrix},$$

Ne segue che il piano tangente a Σ esiste certamente in Q ed R.

ii) per i punti P, Q, R, nell'intorno dei quali è possibile trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione, usare la parametrizzazione per trovare i vettori che generano il piano tangente a Σ.

Per il Teorema delle Funzioni Implicite, siamo certi di poter trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione in un intorno dei punti in cui non si annulla il gradiente di F, dunque nei punti Q ed R.

Nel caso del punto Q, poiché

$$\frac{\partial F}{\partial y}(Q) \neq 0\,,$$

esistono un intorno $U(\pi^{\frac{1}{3}}, 0)$, un intorno $V(1)$ ed una funzione $g(x,z) : U \to V$ tale che $g(\pi^{\frac{1}{3}}, 0) = 1$ e $F(x, g(x,z), z) = 1$ per ogni $(x,z) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione g. Dall'equazione

$$F(x, g(x,z), z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x^3) + g^2(x,z) + \log(1+z^2) = 1$$

con la condizione $g(\pi^{\frac{1}{3}}, 0) = 1$, troviamo

$$g(x,z) = \sqrt{1 - \sin(x^3) - \log(1+z^2)}\,.$$

La parametrizzazione locale di Σ è quindi data da

$$\sigma(u,v) = (u,\, g(u,v),\, v) \quad \text{con matrice Jacobiana} \quad J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essendo $Q = \sigma(\pi^{\frac{1}{3}}, 0)$ i vettori che generano il piano tangente a Σ nel punto Q sono le colonne della matrice $J_\sigma(\pi^{\frac{1}{3}}, 0)$, quindi i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}\,\pi^{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nel caso del punto R, poiché

$$\frac{\partial F}{\partial z}(R) \neq 0\,,$$

esistono un intorno $U(\pi^{\frac{1}{3}}, 0)$, un intorno $V(-\sqrt{e-1})$ ed una funzione $h(x,y) : U \to V$ tale che $h(\pi^{\frac{1}{3}}, 0) = -\sqrt{e-1}$ e $F(x,y,h(x,y)) = 1$ per ogni $(x,y) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione h. Dall'equazione

$$F(x,y,h(x,y)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x^3) + y^2 + \log(1 + h^2(x,y)) = 1$$

con la condizione $h(\pi^{\frac{1}{3}}, 0) = -\sqrt{e-1}$, troviamo

$$h(x,y) = -\sqrt{\exp(1 - \sin(x^3) - y^2) - 1}\,.$$

La parametrizzazione locale di Σ è quindi data da

$$\sigma(u,v) = (u,\ v,\ h(u,v)) \quad \text{con matrice Jacobiana} \quad J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Essendo $R = \sigma(\pi^{\frac{1}{3}}, 0)$ i vettori che generano il piano tangente a Σ nel punto R sono le colonne della matrice $J_\sigma(\pi^{\frac{1}{3}}, 0)$, quindi i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3e}{2}\,\frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{e-1}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 02-07-2014

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x+y \geq 1\,,\; y \leq 1\,, x \leq 1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (12 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\;dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\,, y \leq x^3\right\}$.

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, e^{1+x^2} + \cos(y^3) + z^2 = e+1\right\}$$

i) dire per quali di questi punti di Σ è possibile determinare l'esistenza del piano tangente a Σ:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -\sqrt{\log(e+1)-1} \\ (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii) per i punti P, Q, R, nell'intorno dei quali è possibile trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione, usare la parametrizzazione per trovare i vettori che generano il piano tangente a Σ.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $y = x^2$, e sostituendo nella seconda otteniamo

$$3x^4 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0, 1\} \ .$$

Dunque i punti critici di f sono

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Per caratterizzarli andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione anche di classe C^2 su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \ .$$

Calcoliamo ora la matrice Hessiana in P_1:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

e si ha $\det Hf(0,0) = -9 < 0$. Dunque P_1 è un punto di sella.
Calcoliamo ora la matrice Hessiana in P_2:

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \ ,$$

e si ha $\det Hf(0,0) = 27 > 0$ e traccia$Hf(0,0) = 12 > 0$. Dunque P_2 è un punto di minimo locale.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x + y \geq 1 \, , \ y \leq 1 \, , x \leq 1\right\} \ .$$

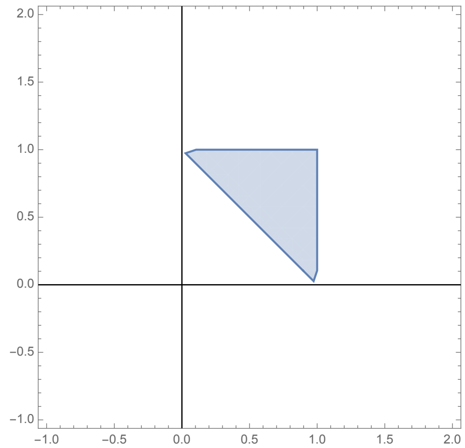

Figure 5: L'insieme $\bar{\Omega}$.

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 5.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non derivabilità, e i punti critici sono stati trovati al punto i). Entrambi però non sono interni all'insieme $\bar{\Omega}$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Parametrizziamo ora i tre segmenti del bordo. Troviamo

$$\gamma_1(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t^3 - 3t + 1\,, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = t^3 - 3t + 1\,, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = 6t^2 - 6t + 1\,, \qquad t \in [0,1]$$

Tutte e tre le funzioni sono sempre derivabili e gli estremi dei loro domini corrispondono agli spigoli. Dunque ci rimane di trovare i punti critici delle tre funzioni.

Abbiamo $g_1'(t) = 3t^2 - 3$, dunque l'unico punto critico nel dominio è $t_0 = 1$ che è sul bordo, quindi non va considerato. Lo stesso vale per g_2, che è uguale a g_1. Infine $g_3'(t) = 12t - 6$ che ha una sola radice in $[0, 1]$ nel punto $t_0 = \frac{1}{2}$. Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q = \gamma_3\Big(\frac{1}{2}\Big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = 1\,, \quad f(S_2) = 1\,, \quad f(S_3) = -1\,, \quad f(Q) = -\frac{1}{2}\,,$$

per cui il massimo di f è 1 e il minimo è -1.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{xy}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,, y \leq x^3\big\}$.

Si veda la soluzione nel primo testo.

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, e^{1+x^2} + \cos(y^3) + z^2 = e + 1\Big\}$$

i) dire per quali di questi punti di Σ *è possibile determinare l'esistenza del piano tangente a* Σ*:*

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -\sqrt{\log(e+1) - 1} \\ (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione di classe C^1

$$F(x, y, z) = e^{1+x^2} + \cos(y^3) + z^2$$

dunque certamente esiste il piano tangente nei punti di Σ in cui non si annulla il gradiente di F. Abbiamo

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x\, e^{1+x^2} \\ -3y^2 \sin(y^3) \\ 2z \end{pmatrix} ,$$

e quindi

$$\nabla F(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3(\frac{\pi}{2})^{\frac{2}{3}} \\ 2 \end{pmatrix} , \quad \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \nabla F(R) = \begin{pmatrix} -(e+1)\sqrt{\log(e+1) - 1} \\ -3(\frac{\pi}{2})^{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

Ne segue che il piano tangente a Σ esiste certamente in P ed R.

ii) per i punti P, Q, R, nell'intorno dei quali è possibile trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione, usare la parametrizzazione per trovare i vettori che generano il piano tangente a Σ.

Per il Teorema delle Funzioni Implicite, siamo certi di poter trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione in un intorno dei punti in cui non si annulla il gradiente di F, dunque nei punti P ed R.

Nel caso del punto P, poiché
$$\frac{\partial F}{\partial z}(P) \neq 0\,,$$
esistono un intorno $U(0, (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}})$, un intorno $V(1)$ ed una funzione $h(x,y) : U \to V$ tale che $h(0, (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}}) = 1$ e $F(x, y, h(x,y)) = e + 1$ per ogni $(x,y) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione h. Dall'equazione
$$F(x, y, h(x,y)) = e + 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1+x^2} + \cos(y^3) + h^2(x,y) = e + 1$$
con la condizione $h(0, (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}}) = 1$, troviamo
$$h(x,y) = \sqrt{e + 1 - e^{1+x^2} - \cos(y^3)}\,.$$
La parametrizzazione locale di Σ è quindi data da
$$\sigma(u,v) = (u,\, v,\, h(u,v)) \quad \text{con matrice Jacobiana} \quad J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$
Essendo $P = \sigma(0, (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}})$ i vettori che generano il piano tangente a Σ nel punto P sono le colonne della matrice $J_\sigma(0, (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}})$, quindi i vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2}\,(\frac{\pi}{2})^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$
Nel caso del punto R, poiché
$$\frac{\partial F}{\partial x}(R) \neq 0\,,$$
esistono un intorno $U((\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}}, 0)$, un intorno $V(-\sqrt{\log(e+1) - 1})$ ed una funzione $g(y,z) : U \to V$ tale che $g((\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}}, 0) = -\sqrt{\log(e+1) - 1}$ e $F(g(y,z), y, z) = e + 1$ per ogni $(y,z) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione g. Dall'equazione
$$F(g(y,z), y, z) = e + 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1+g^2(y,z)} + \cos(y^3) + z^2 = e + 1$$

con la condizione $g((\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}}, 0) = -\sqrt{\log(e+1)-1}$, troviamo

$$g(y,z) = -\sqrt{\log(e+1-\cos(y^3)) - z^2) - 1}\,.$$

La parametrizzazione locale di Σ è quindi data da

$$\sigma(u,v) = (g(u,v),\, u,\, v) \quad \text{con matrice Jacobiana} \quad J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essendo $R = \sigma((\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}}, 0)$ i vettori che generano il piano tangente a Σ nel punto R sono le colonne della matrice $J_\sigma((\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}}, 0)$, quindi i vettori

$$\begin{pmatrix} -\frac{3\,(\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}}}{(e+1)\,\sqrt{\log(e+1)-1}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$