Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 23-06-2012

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left((x^2+y^2)^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) studiarne continuità e differenziabilità su tutti i punti del dominio;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{ (x,y) \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}},\ y \geq 0 \right\}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile sapere che* $4t - \tan(t) > 0$ *per* $t \in [1, \frac{\pi}{3}]$)

Esercizio 2. (19 punti) Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\ , \qquad \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) \end{pmatrix}$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 \leq u^2 + v^2 \leq 4 \right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{9}{4}\right)\right)$;

ii) calcolare l'area del sottoinsieme di Σ dato da $\sigma(U)$ dove

$$U = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u \geq 0,\ v \geq 0,\ 2 \leq u^2+v^2 \leq 4,\ 0 \leq \arctan\frac{v}{u} \leq \frac{\pi}{4}\sqrt{u^2+v^2} \right\}$$

iii) determinare se Σ è una superficie di rotazione e, in caso affermativo, calcolare il volume della parte "interna" a Σ.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left((x^2+y^2)^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) studiarne continuità e differenziabilità su tutti i punti del dominio;

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e al di fuori dell'origine è continua e differenziabile perché composizione di funzioni continue e differenziabili. Rimane quindi da studiarne il comportamento nell'origine.

Iniziamo con la continuità. Il metodo più semplice è usare il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ per dedurre che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left((x^2+y^2)^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

Quindi il limite di f in $(0,0)$ esiste ed è uguale a $f(0,0)$. Di conseguenza f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

Per studiare la differenziabilità di f nell'origine applichiamo la definizione. Controlliamo quindi se esistono innanzitutto le derivate parziali nell'origine. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^4)}{t\,|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t\,|t|} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^4)}{t\,|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t\,|t|} = 0$$

A questo punto, se il differenziale di f in $(0,0)$ esiste, coincide con l'applicazione lineare rappresentata dal vettore $(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = (0,0)$. Quindi la f è differenziabile in $(0,0)$ se

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2) - f(0,0) - < (0,0),(tv_1,tv_2) >}{t} = 0$$

uniformemente in v con $\|v\| = 1$. Sostituendo la funzione f si trova

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^4(v_1^2+v_2^2)^2)}{t\,|t|\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4(v_1^2+v_2^2)^{\frac{3}{2}}}{t\,|t|} = 0$$

Di conseguenza f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \ : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \ y \geq 0\right\}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile sapere che* $4t - \tan(t) > 0$ *per* $t \in [1, \frac{\pi}{3}]$)

L'insieme da considerare è la parte superiore di una corona circolare (vedi figura 1). Per studiare massimo e minimo assoluto di f su D dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non derivabilità. Studiamo quindi l'esistenza di punti critici liberi interni a D, ossia di punti interni a D che annullano il gradiente di f. Si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[4(x^2+y^2)^2 \cos((x^2+y^2)^2) - \sin((x^2+y^2)^2)\right] \\ \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[4(x^2+y^2)^2 \cos((x^2+y^2)^2) - \sin((x^2+y^2)^2)\right] \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$ e usando il suggerimento con $t = (x^2+y^2)^2$, si ottiene che non ci sono punti critici liberi interni a D.

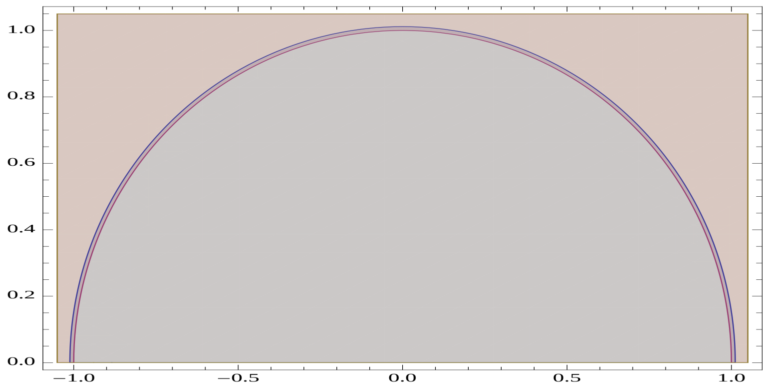

Figure 1: L'insieme D

Studiamo quindi il comportamento di f sul bordo di D, che consiste di due semi-circonferenze, $\{x^2+y^2=1,\, y \geq 0\}$ e $\{x^2+y^2=\sqrt{\frac{\pi}{3}},\, y \geq 0\}$, e dei due segmenti che le uniscono, $\left\{1 \leq x \leq \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}},\, y=0\right\}$ e $\left\{-\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \leq x \leq -1,\, y=0\right\}$.

Notiamo che la funzione f dipende solo da (x^2+y^2), quindi è costante sulle due semi-circonferenze, e le due costanti che assume sono i valori agli estremi dei due segmenti. Inoltre i due segmenti sono simmetrici rispetto all'asse y. In conclusione ci basta studiare i valori che la funzione f assume su uno dei segmenti. Poniamo quindi

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s \in \left[1, \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$$

componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g(s) = f(\gamma(s)) = \frac{\sin(s^4)}{s}, \qquad s \in \left[1, \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$$

Derivando la funzione g otteniamo

$$g'(s) = \frac{4s^4 \cos(s^4) - \sin(s^4)}{s^2} = \frac{\cos(s^4)}{s^2} \left[4s^4 - \tan(s^4)\right] > 0$$

per $s \in \left[1, \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$ grazie al suggerimento. Quindi il minimo di g è $g(1)$ e il massimo di g è $g\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\right)$. Inoltre da quanto detto prima, il massimo e il minimo di g coincidono con il massimo e il minimo di f su D. Quindi

$$\min_D f = \sin(1) \qquad \text{e} \qquad \max_D f = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

Esercizio 2. *Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione*

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \ , \qquad \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) \end{pmatrix}$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 \le u^2+v^2 \le 4\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{9}{4}\right)\right)$;

Dobbiamo trovare il vettore normale a Σ nel punto $P = \sigma\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$. Scriviamo quindi innanzitutto la matrice Jacobiana di σ da cui otteniamo il vettore normale come prodotto vettoriale tra le due colonne. Troviamo

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{u}{u^2+v^2} \\ -\frac{v}{u^2+v^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi $\vec{n}\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$, che è

$$\vec{n}\left(1,\ \frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{13} \\ -\frac{6}{13} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è

$$-\frac{4}{13}(x-1) - \frac{6}{13}\left(y-\frac{3}{2}\right) + \left(z - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{9}{4}\right)\right) = 0$$

ii) calcolare l'area del sottoinsieme di Σ dato da $\sigma(U)$ dove

$$U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u \ge 0,\ v \ge 0,\ 2 \le u^2+v^2 \le 4,\ 0 \le \arctan\frac{v}{u} \le \frac{\pi}{4}\sqrt{u^2+v^2}\right\}$$

Applicando la formula per l'area di una superficie parametrizzata, dobbiamo calcolare l'integrale

$$\text{Area}(\sigma(U)) = \iint_U \|\vec{n}(u,v)\|\, dudv$$

Dal punto i) troviamo che

$$\|\vec{n}(u,v)\| = \sqrt{\left(-\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(-\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{u^2+v^2}+1}$$

Inoltre per calcolare l'integrale usiamo la formula di cambiamento di variabili con $u = \rho\cos\phi$ e $v = \rho\sin\phi$, da cui l'insieme U si riscrive come

$$\tilde{U} = \left\{(\rho,\phi) \in (0,+\infty)\times(0,2\pi) \ : \ \sqrt{2} \le \rho \le 2,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}\,\rho\right\}$$

che è semplice rispetto a ϕ. Quindi in definitiva

$$\text{Area}(\sigma(U)) = \iint_U \|\vec{n}(u,v)\|\, dudv = \iint_{\tilde{U}} \rho\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+1}\ d\rho d\phi = \int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}\rho} \sqrt{\rho^2+1}\ d\phi\right) d\rho =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\pi}{4}\,\rho\sqrt{\rho^2+1}\ d\rho = \frac{\pi}{12}\,(\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{\pi}{12}\,(5^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}})$$

iii) determinare se Σ è una superficie di rotazione e, in caso affermativo, calcolare il volume della parte "interna" a Σ.

Per determinare che Σ si può esprimere anche come superficie di rotazione osserviamo che dalla definizione di σ si ottiene

$$z = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \qquad \text{e quindi} \qquad x^2+y^2 = e^{2z}$$

con $\frac{1}{2}\log 2 \le z \le \frac{1}{2}\log 4$ (estremi che si ottengono dalla definizione di D).

Il volume della parte "interna" a Σ si può calcolare allora con la formula

$$\text{Volume}(\Sigma) = \pi\int_{\frac{1}{2}\log 2}^{\log 2} e^{2z}dz = \frac{\pi}{2}(4-2) = \pi$$

o integrando la funzione costante 1 sull'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \le e^{2z},\ \frac{1}{2}\log 2 \le z \le \frac{1}{2}\log 4\right\}$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 23-06-2012

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) studiarne continuità e differenziabilità su tutti i punti del dominio;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{ (x,y) \ : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq \frac{\pi}{3}, \ y \leq 0 \right\}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile sapere che* $t - \tan(t) < 0$ *per* $t \in [1, \frac{\pi}{3}]$)

Esercizio 2. (19 punti) Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 , \qquad \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) \end{pmatrix}$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4 \leq u^2+v^2 \leq 9 \right\}$$

i) scrivere l'equazione parametrica del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(1, \ 2, \ \frac{1}{2}\log(5)\right)$;

ii) calcolare l'area del sottoinsieme di Σ dato da $\sigma(U)$ dove

$$U = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u \geq 0, \ v \geq 0, \ 4 \leq u^2+v^2 \leq 9, \ 0 \leq \arctan\frac{v}{u} \leq \frac{\pi}{6}\sqrt{u^2+v^2} \right\}$$

iii) determinare se Σ è una superficie di rotazione e, in caso affermativo, calcolare il volume della parte "interna" a Σ.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) studiarne continuità e differenziabilità su tutti i punti del dominio;

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e al di fuori dell'origine è continua e differenziabile perché composizione di funzioni continue e differenziabili. Rimane quindi da studiarne il comportamento nell'origine.

Iniziamo con la continuità. Il metodo più semplice è usare il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ per dedurre che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

Quindi il limite di f in $(0,0)$ esiste ed è uguale a $f(0,0)$. Di conseguenza f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

Per studiare la differenziabilità di f nell'origine applichiamo la definizione. Controlliamo quindi se esistono innanzitutto le derivate parziali nell'origine. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin(t^2)}{t^2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \frac{1}{6}t^4 + o(t^4) - 1}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin(t^2)}{t^2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \frac{1}{6}t^4 + o(t^4) - 1}{t} = 0$$

A questo punto, se il differenziale di f in $(0,0)$ esiste, coincide con l'applicazione lineare rappresentata dal vettore $(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = (0,0)$. Quindi la f è differenziabile in $(0,0)$ se

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0) - < (0,0), (tv_1, tv_2) >}{t} = 0$$

uniformemente in v con $\|v\| = 1$. Sostituendo la funzione f si trova

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin(t^2(v_1^2+v_2^2))}{t^2(v_1^2+v_2^2)} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{6}t^4(v_1^2+v_2^2)^4 + o(t^4)}{t} = 0$$

Di conseguenza f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{3}, \ y \leq 0\right\}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile sapere che* $t - \tan(t) < 0$ *per* $t \in [1, \frac{\pi}{3}]$)

L'insieme da considerare è la parte inferiore di una corona circolare (vedi figura 2). Per studiare massimo e minimo assoluto di f su D dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non derivabilità. Studiamo quindi l'esistenza di punti critici liberi interni a D, ossia di punti interni a D che annullano il gradiente di f. Si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \left[(x^2+y^2)\,\cos(x^2+y^2) - \sin(x^2+y^2)\right] \\ \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \left[(x^2+y^2)\,\cos(x^2+y^2) - \sin(x^2+y^2)\right] \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$ e usando il suggerimento con $t = (x^2+y^2)$, si ottiene che non ci sono punti critici liberi interni a D.

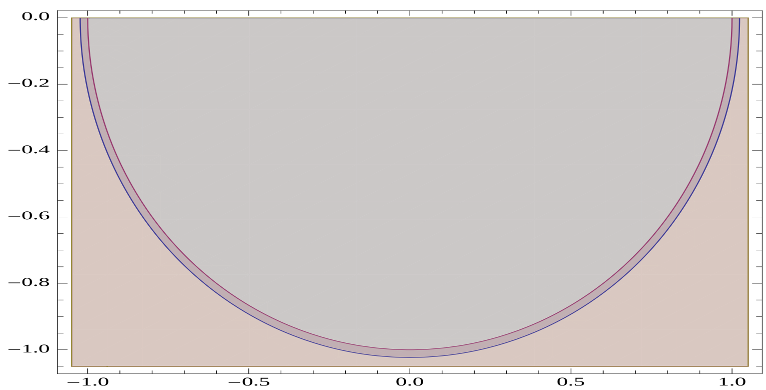

Figure 2: L'insieme D

Studiamo quindi il comportamento di f sul bordo di D, che consiste di due semi-circonferenze, $\left\{x^2+y^2=1,\, y \leq 0\right\}$ e $\left\{x^2+y^2=\frac{\pi}{3},\, y \leq 0\right\}$, e dei due segmenti che le uniscono, $\left\{1 \leq x \leq \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}},\, y=0\right\}$ e $\left\{-\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \leq x \leq -1,\, y=0\right\}$.

Notiamo che la funzione f dipende solo da (x^2+y^2), quindi è costante sulle due semi-circonferenze, e le due costanti che assume sono i valori agli estremi dei due segmenti. Inoltre i due segmenti sono simmetrici rispetto all'asse y. In conclusione ci basta studiare i valori che la funzione f assume su uno dei segmenti. Poniamo quindi

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s \in \left[1, \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g(s) = f(\gamma(s)) = \frac{\sin(s^2)}{s^2}, \qquad s \in \left[1, \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Derivando la funzione g otteniamo

$$g'(s) = \frac{2s^3\,\cos(s^2) - 2s\,\sin(s^2)}{s^4} = \frac{2\cos(s^2)}{s^3}\,\left[s^2 - \tan(s^2)\right] < 0$$

per $s \in \left[1, \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ grazie al suggerimento. Quindi il minimo di g è $g\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ e il massimo di g è $g(1)$. Inoltre da quanto detto prima, il massimo e il minimo di g coincidono con il massimo e il minimo di f su D. Quindi

$$\min_D f = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} \qquad \text{e} \qquad \max_D f = \sin(1)$$

Esercizio 2. *Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione*

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\ , \qquad \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) \end{pmatrix}$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4 \le u^2+v^2 \le 9\right\}$$

i) scrivere l'equazione parametrica del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(1,\ 2,\ \frac{1}{2}\log(5)\right)$;

Dobbiamo trovare una base del piano tangente a Σ nel punto $P = \sigma(1,\ 2)$. Scriviamo quindi la matrice Jacobiana di σ le cui colonne sono una base che cerchiamo. Troviamo

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

e quindi una base del piano tangente sono le due colonne di $J_\sigma(1,2)$. Otteniamo quindi che

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{2}\log(5) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

ii) calcolare l'area del sottoinsieme di Σ dato da $\sigma(U)$ dove

$$U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u \ge 0,\ v \ge 0,\ 4 \le u^2+v^2 \le 9,\ 0 \le \arctan\frac{v}{u} \le \frac{\pi}{6}\sqrt{u^2+v^2}\right\}$$

Applicando la formula per l'area di una superficie parametrizzata, dobbiamo calcolare l'integrale

$$\text{Area}(\sigma(U)) = \iint_U \|\vec{n}(u,v)\|\, dudv$$

Dal punto i), usando la matrice Jacobiana J_σ troviamo che

$$\vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{u}{u^2+v^2} \\ -\frac{v}{u^2+v^2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \|\vec{n}(u,v)\| = \sqrt{\left(-\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(-\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{u^2+v^2} + 1}$$

Inoltre per calcolare l'integrale usiamo la formula di cambiamento di variabili con $u = \rho\cos\phi$ e $v = \rho\sin\phi$, da cui l'insieme U si riscrive come

$$\tilde{U} = \left\{(\rho, \phi) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \ : \ 2 \leq \rho \leq 3, \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}\,\rho\right\}$$

che è semplice rispetto a ϕ. Quindi in definitiva

$$\text{Area}(\sigma(U)) = \iint_U \|\vec{n}(u,v)\|\, dudv = \iint_{\tilde{U}} \rho\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + 1}\ d\rho d\phi = \int_2^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}\rho} \sqrt{\rho^2+1}\ d\phi\right) d\rho =$$

$$= \int_2^3 \frac{\pi}{6}\,\rho\sqrt{\rho^2+1}\ d\rho = \frac{\pi}{18}\,(\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^3 = \frac{\pi}{18}\,(10^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}})$$

iii) determinare se Σ è una superficie di rotazione e, in caso affermativo, calcolare il volume della parte "interna" a Σ.

Per determinare che Σ si può esprimere anche come superficie di rotazione osserviamo che dalla definizione di σ si ottiene

$$z = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \qquad \text{e quindi} \qquad x^2 + y^2 = e^{2z}$$

con $\frac{1}{2}\log 4 \leq z \leq \frac{1}{2}\log 9$ (estremi che si ottengono dalla definizione di D).

Il volume della parte "interna" a Σ si può calcolare allora con la formula

$$\text{Volume}(\Sigma) = \pi\int_{\log 2}^{\log 3} e^{2z} dz = \frac{\pi}{2}(9-4) = \frac{5}{2}\pi$$

o integrando la funzione costante 1 sull'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq e^{2z}, \ \frac{1}{2}\log 4 \leq z \leq \frac{1}{2}\log 9\right\}$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 23-06-2012

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) studiarne continuità e differenziabilità su tutti i punti del dominio;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{ (x,y) \ : \ \frac{\pi}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1, \ x \geq 0 \right\}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile sapere che* $2t - \tan(t) > 0$ *per* $t \in [\frac{\pi}{4}, 1]$)

Esercizio 2. (19 punti) Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \ , \qquad \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) \end{pmatrix}$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq u^2 + v^2 \leq 9 \right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(2, \ 2, \ \frac{1}{2}\log(8)\right)$;

ii) calcolare l'area del sottoinsieme di Σ dato da $\sigma(U)$ dove

$$U = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u \geq 0, \ v \geq 0, \ 1 \leq u^2 + v^2 \leq 9, \ 0 \leq \arctan\frac{v}{u} \leq \frac{\pi}{6}\sqrt{u^2+v^2} \right\}$$

iii) determinare se Σ è una superficie di rotazione e, in caso affermativo, calcolare il volume della parte "interna" a Σ.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) studiarne continuità e differenziabilità su tutti i punti del dominio;

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e al di fuori dell'origine è continua e differenziabile perché composizione di funzioni continue e differenziabili. Rimane quindi da studiarne il comportamento nell'origine.

Iniziamo con la continuità. Il metodo più semplice è usare il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ per dedurre che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Quindi il limite di f in $(0,0)$ esiste ed è uguale a $f(0,0)$. Di conseguenza f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

Per studiare la differenziabilità di f nell'origine applichiamo la definizione. Controlliamo quindi se esistono innanzitutto le derivate parziali nell'origine. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^2)}{t\,|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t\,|t|} = \nexists$$

Quindi la derivata parziale rispetto a x non esiste in $(0,0)$ e di conseguenza la funzione non può essere differenziabile in $(0,0)$.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y)\ :\ \frac{\pi}{4} \leq x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\right\}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile sapere che* $2t - \tan(t) > 0$ *per* $t \in [\frac{\pi}{4}, 1]$)

L'insieme da considerare è la parte destra di una corona circolare (vedi figura 3). Per studiare massimo e minimo assoluto di f su D dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non derivabilità. Studiamo quindi l'esistenza di punti critici liberi interni a D, ossia di punti interni a D che annullano il gradiente di f. Si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2) - \sin(x^2+y^2)\right] \\ \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2) - \sin(x^2+y^2)\right] \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$ e usando il suggerimento con $t = (x^2+y^2)$, si ottiene che non ci sono punti critici liberi interni a D.

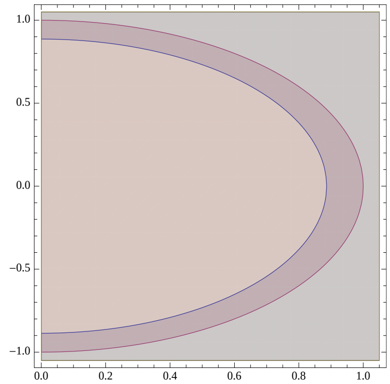

Figure 3: L'insieme D

Studiamo quindi il comportamento di f sul bordo di D, che consiste di due semi-circonferenze, $\left\{x^2+y^2=1,\, x\geq 0\right\}$ e $\left\{x^2+y^2=\frac{\pi}{4},\, x\geq 0\right\}$, e dei due segmenti che le uniscono, $\left\{-1\leq y\leq -\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}},\, x=0\right\}$ e $\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\leq y\leq 1,\, x=0\right\}$.

Notiamo che la funzione f dipende solo da (x^2+y^2), quindi è costante sulle due semi-circonferenze, e le due costanti che assume sono i valori agli estremi dei due segmenti. Inoltre i due segmenti sono simmetrici rispetto all'asse y. In conclusione ci basta studiare i valori che la funzione f assume su uno dei segmenti. Poniamo quindi

$$\gamma(s)=\begin{pmatrix}0\\ s\end{pmatrix}, \qquad s\in\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}},1\right]$$

componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g(s)=f(\gamma(s))=\frac{\sin(s^2)}{s}, \qquad s\in\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}},1\right]$$

Derivando la funzione g otteniamo

$$g'(s)=\frac{2s^2\,\cos(s^2)-\sin(s^2)}{s^2}=\frac{\cos(s^2)}{s^2}\,\left[2s^2-\tan(s^2)\right]>0$$

per $s\in\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}},1\right]$ grazie al suggerimento. Quindi il minimo di g è $g\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ e il massimo di g è $g\,(1)$. Inoltre da quanto detto prima, il massimo e il minimo di g coincidono con il massimo e il minimo di f su D. Quindi

$$\min_D\, f=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{e} \qquad \max_D\, f=\sin(1)$$

Esercizio 2. *Data la superficie* $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ *immagine della parametrizzazione*

$$\sigma: D\to\mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(u,v)=\begin{pmatrix}u\\ v\\ \frac{1}{2}\log(u^2+v^2)\end{pmatrix}$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le u^2+v^2 \le 9\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(2,\ 2,\ \frac{1}{2}\log(8)\right)$;

Dobbiamo trovare il vettore normale a Σ nel punto $P = \sigma(2,\ 2)$. Scriviamo quindi innanzitutto la matrice Jacobiana di σ da cui otteniamo il vettore normale come prodotto vettoriale tra le due colonne. Troviamo

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{u}{u^2+v^2} \\ -\frac{v}{u^2+v^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi $\vec{n}(2,\ 2)$, che è

$$\vec{n}(2,\ 2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è

$$-\frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{4}(y-2) + \left(z - \frac{1}{2}\log(8)\right) = 0$$

ii) calcolare l'area del sottoinsieme di Σ dato da $\sigma(U)$ dove

$$U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u \ge 0,\ v \ge 0,\ 1 \le u^2+v^2 \le 9,\ 0 \le \arctan\frac{v}{u} \le \frac{\pi}{6}\sqrt{u^2+v^2}\right\}$$

Applicando la formula per l'area di una superficie parametrizzata, dobbiamo calcolare l'integrale

$$\text{Area}(\sigma(U)) = \iint_U \|\vec{n}(u,v)\|\, dudv$$

Dal punto i) troviamo che

$$\|\vec{n}(u,v)\| = \sqrt{\left(-\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(-\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{u^2+v^2}+1}$$

Inoltre per calcolare l'integrale usiamo la formula di cambiamento di variabili con $u = \rho\cos\phi$ e $v = \rho\sin\phi$, da cui l'insieme U si riscrive come

$$\tilde{U} = \left\{(\rho,\phi) \in (0,+\infty)\times(0,2\pi) \ : \ 1 \le \rho \le 3,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{6}\rho\right\}$$

che è semplice rispetto a ϕ. Quindi in definitiva

$$\text{Area}(\sigma(U)) = \iint_U \|\vec{n}(u,v)\|\, dudv = \iint_{\tilde{U}} \rho\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+1}\, d\rho d\phi = \int_1^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}\rho} \sqrt{\rho^2+1}\, d\phi\right) d\rho =$$

$$= \int_1^3 \frac{\pi}{6}\, \rho\sqrt{\rho^2+1}\; d\rho = \frac{\pi}{18}\,(\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 = \frac{\pi}{18}\,(10^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}})$$

iii) determinare se Σ è una superficie di rotazione e, in caso affermativo, calcolare il volume della parte "interna" a Σ.

Per determinare che Σ si può esprimere anche come superficie di rotazione osserviamo che dalla definizione di σ si ottiene

$$z = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \qquad \text{e quindi} \qquad x^2+y^2 = e^{2z}$$

con $\frac{1}{2}\log 1 \le z \le \frac{1}{2}\log 9$ (estremi che si ottengono dalla definizione di D).

Il volume della parte "interna" a Σ si può calcolare allora con la formula

$$\text{Volume}(\Sigma) = \pi \int_0^{\log 3} e^{2z} dz = \frac{\pi}{2}(9-1) = 4\pi$$

o integrando la funzione costante 1 sull'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \le e^{2z},\; 0 \le z \le \frac{1}{2}\log 9\right\}$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 23-06-2012

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) studiarne continuità e differenziabilità su tutti i punti del dominio;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{ (x,y) \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 , \ x \leq 0 \right\}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile sapere che* $t - \tan(t) < 0$ *per* $t \in [1, \frac{\pi}{3}]$)

Esercizio 2. (19 punti) Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 , \qquad \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) \end{pmatrix}$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4 \right\}$$

i) scrivere l'equazione parametrica del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(1, \ \frac{3}{2}, \ \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{9}{4}\right)\right)$;

ii) calcolare l'area del sottoinsieme di Σ dato da $\sigma(U)$ dove

$$U = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u \geq 0, \ v \geq 0, \ 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4, \ 0 \leq \arctan\frac{v}{u} \leq \frac{\pi}{4}\sqrt{u^2+v^2} \right\}$$

iii) determinare se Σ è una superficie di rotazione e, in caso affermativo, calcolare il volume della parte "interna" a Σ.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) studiarne continuità e differenziabilità su tutti i punti del dominio;

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e al di fuori dell'origine è continua e differenziabile perché composizione di funzioni continue e differenziabili. Rimane quindi da studiarne il comportamento nell'origine.

Iniziamo con la continuità. Il metodo più semplice è usare il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ per dedurre che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} = 1$$

Quindi il limite di f in $(0,0)$ esiste ed è uguale a $f(0,0)$. Di conseguenza f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

Per studiare la differenziabilità di f nell'origine applichiamo la definizione. Controlliamo quindi se esistono innanzitutto le derivate parziali nell'origine. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin((t^2)^{\frac{1}{4}})}{(t^2)^{\frac{1}{4}}} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\sqrt{|t|}) - \sqrt{|t|}}{t\sqrt{|t|}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{6}|t|^{\frac{3}{2}} + o(|t|^{\frac{3}{2}})}{t\,|t|^{\frac{1}{2}}} = \nexists$$

Quindi la derivata parziale rispetto a x non esiste in $(0,0)$ e di conseguenza la funzione non può essere differenziabile in $(0,0)$.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \ : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq \left(\frac{\pi}{3}\right)^4, \ x \leq 0\right\}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile sapere che* $t - \tan(t) < 0$ *per* $t \in [1, \frac{\pi}{3}]$)

L'insieme da considerare è la parte superiore di una corona circolare (vedi figura 4). Per studiare massimo e minimo assoluto di f su D dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non derivabilità. Studiamo quindi l'esistenza di punti critici liberi interni a D, ossia di punti interni a D che annullano il gradiente di f. Si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}} \left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}} \cos((x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}) - \sin((x^2+y^2)^{\frac{1}{4}})\right] \\ \frac{y}{2(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}} \left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}} \cos((x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}) - \sin((x^2+y^2)^{\frac{1}{4}})\right] \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$ e usando il suggerimento con $t = (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}$, si ottiene che non ci sono punti critici liberi interni a D.

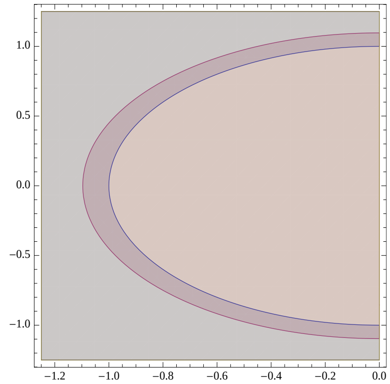

Figure 4: L'insieme D

Studiamo quindi il comportamento di f sul bordo di D, che consiste di due semi-circonferenze, $\{x^2+y^2=1,\, x \le 0\}$ e $\left\{x^2+y^2=\left(\frac{\pi}{3}\right)^4,\, x\le 0\right\}$, e dei due segmenti che le uniscono, $\left\{1 \le y \le \left(\frac{\pi}{3}\right)^2,\, x=0\right\}$ e $\left\{-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \le y \le -1,\, x=0\right\}$.

Notiamo che la funzione f dipende solo da (x^2+y^2), quindi è costante sulle due semi-circonferenze, e le due costanti che assume sono i valori agli estremi dei due segmenti. Inoltre i due segmenti sono simmetrici rispetto all'asse y. In conclusione ci basta studiare i valori che la funzione f assume su uno dei segmenti. Poniamo quindi

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}, \qquad s \in \left[1, \left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right]$$

componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g(s) = f(\gamma(s)) = \frac{\sin(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}, \qquad s \in \left[1, \left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right]$$

Derivando la funzione g otteniamo

$$g'(s) = \frac{\cos(\sqrt{s}) - \frac{1}{\sqrt{s}}\sin(\sqrt{s})}{2s} = \frac{\cos(\sqrt{s})}{2s\sqrt{s}}\left[\sqrt{s} - \tan(\sqrt{s})\right] < 0$$

per $s \in \left[1, \left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right]$ grazie al suggerimento. Quindi il minimo di g è $g\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right)$ e il massimo di g è $g(1)$. Inoltre da quanto detto prima, il massimo e il minimo di g coincidono con il massimo e il minimo di f su D. Quindi

$$\min_D f = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} \qquad \text{e} \qquad \max_D f = \sin(1)$$

Esercizio 2. *Data la superficie* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ *immagine della parametrizzazione*

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \ , \qquad \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) \end{pmatrix}$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le u^2+v^2 \le 4 \right\}$$

i) scrivere l'equazione parametrica del piano tangente a Σ *nel punto* $P = \left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{9}{4}\right)\right)$*;*

Dobbiamo trovare una base del piano tangente a Σ nel punto $P = \sigma\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$. Scriviamo quindi la matrice Jacobiana di σ le cui colonne sono una base che cerchiamo. Troviamo

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

e quindi una base del piano tangente sono le due colonne di $J_\sigma\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$. Otteniamo quindi che

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{9}{4}\right) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{4}{13} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{6}{13} \end{pmatrix} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

ii) calcolare l'area del sottoinsieme di Σ *dato da* $\sigma(U)$ *dove*

$$U = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u \ge 0,\ v \ge 0,\ 1 \le u^2+v^2 \le 4,\ 0 \le \arctan\frac{v}{u} \le \frac{\pi}{4}\sqrt{u^2+v^2} \right\}$$

Applicando la formula per l'area di una superficie parametrizzata, dobbiamo calcolare l'integrale

$$\mathrm{Area}(\sigma(U)) = \iint_U \|\vec{n}(u,v)\| \, dudv$$

Dal punto i), usando la matrice Jacobiana J_σ troviamo che

$$\vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{u}{u^2+v^2} \\ -\frac{v}{u^2+v^2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \|\vec{n}(u,v)\| = \sqrt{\left(-\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(-\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{u^2+v^2}+1}$$

Inoltre per calcolare l'integrale usiamo la formula di cambiamento di variabili con $u = \rho\cos\phi$ e $v = \rho\sin\phi$, da cui l'insieme U si riscrive come

$$\tilde{U} = \left\{ (\rho,\phi) \in (0,+\infty)\times(0,2\pi) \ : \ 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}\rho \right\}$$

che è semplice rispetto a ϕ. Quindi in definitiva

$$\text{Area}(\sigma(U)) = \iint_U \|\vec{n}(u,v)\|\, dudv = \iint_{\tilde{U}} \rho\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+1}\, d\rho d\phi = \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}\rho} \sqrt{\rho^2+1}\, d\phi \right) d\rho =$$

$$= \int_1^2 \frac{\pi}{4}\rho\sqrt{\rho^2+1}\, d\rho = \frac{\pi}{12}\,(\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{12}\,(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}})$$

iii) determinare se Σ è una superficie di rotazione e, in caso affermativo, calcolare il volume della parte "interna" a Σ.

Per determinare che Σ si può esprimere anche come superficie di rotazione osserviamo che dalla definizione di σ si ottiene

$$z = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \qquad \text{e quindi} \qquad x^2+y^2 = e^{2z}$$

con $\frac{1}{2}\log 1 \le z \le \frac{1}{2}\log 4$ (estremi che si ottengono dalla definizione di D).

Il volume della parte "interna" a Σ si può calcolare allora con la formula

$$\text{Volume}(\Sigma) = \pi\int_0^{\log 2} e^{2z}dz = \frac{\pi}{2}(4-1) = \frac{3}{2}\pi$$

o integrando la funzione costante 1 sull'insieme

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \le e^{2z},\; 0 \le z \le \frac{1}{2}\log 4 \right\}$$