Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito A del 22-07-2010

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (11 punti) Per la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

i) determinare il dominio, disegnare un grafico approssimativo e dire in quali punti è differenziabile;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0,\; 4x^2+y^2 \geq 1,\; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 2. (15 punti) Data la curva

$$\gamma(t) = (\cos t + \sin t,\; 2\sin t - 1)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

i) dire se è una curva regolare;

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno Γ della curva nel punto $P = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0\right)$;

iii) calcolare il lavoro che il campo

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{(x-5)^2+y^2} \\ \frac{x-5}{(x-5)^2+y^2} \end{pmatrix}$$

compie lungo la curva γ;

iv) calcolare il lavoro che il campo $\mathbf{F}$ del punto precedente compie lungo l'insieme $\Gamma \cap \{y \geq 0\}$, dove Γ è il sostegno della curva γ.

Esercizio 3. (8 punti) Calcolare

$$\iint_\Omega \log(x^2+y^2)\,dxdy \qquad \text{con} \qquad \Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq -y,\; y \geq x,\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \right\}$$

Svolgimento - A

Esercizio 1. Per la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

i) determinare il dominio, disegnare un grafico approssimativo e dire in quali punti è differenziabile;

Il dominio della funzione è l'insieme

$$\text{Dominio} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \geq 0\right\} = \mathbb{R}^2$$

e il grafico è l'insieme

$$\text{Grafico} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

che è un cono ed è disegnato nella figura 1.

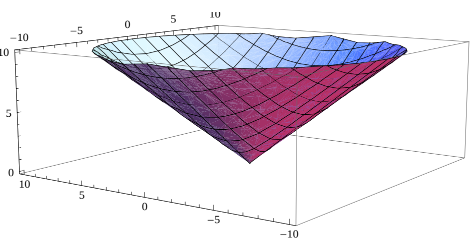

Figure 1: Il grafico della funzione f

Sappiamo che il cono non ammette piano tangente nel vertice, quindi possiamo concludere che la funzione f non è differenziabile nel punto $(0,0)$. Lo studio completo della differenziabilità per la funzione f si ottiene interpretando f come la composizione di due funzioni

$$g(x,y) = x^2+y^2, \qquad h(t) = \sqrt{t} \quad \text{con} \quad f = h \circ g$$

La funzione g ha come dominio $\mathbb{R}^2$ ed essendo un polinomio è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$, mentre la funzione h ha come dominio $\{t \geq 0\}$ ed è differenziabile per $t > 0$. Quindi dal teorema di differenziabilità delle funzioni composte otteniamo che f è differenziabile in tutti i punti in cui $x^2+y^2 > 0$ quindi su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per studiare il problema nell'origine possiamo vedere se esistono le derivate parziali (condizione necessaria per la differenziabilità). Vediamo se esiste la derivata parziale rispetto a x in $(0,0)$. Dovrebbe esistere il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0)+t(1,0)\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

che invece non esiste. Quindi come avevamo già dedotto dal grafico, la funzione f non è differenziabile in $(0,0)$.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ 4x^2+y^2 \geq 1, \ \frac{x^2}{4}+y^2 \leq 1\right\}.$$

Dobbiamo prendere in considerazione i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione. L'insieme D è indicato nella figura 2.

Non ci sono punti critici di f né punti di non differenziabilità di f interni a D.

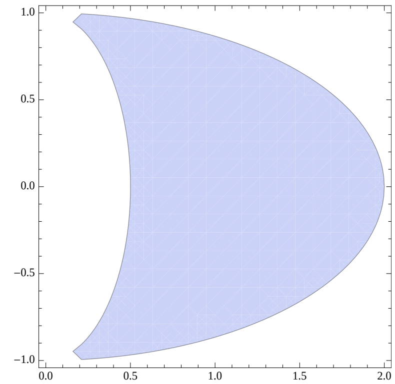

Figure 2: L'insieme D

Per studiare i punti critici vincolati al bordo di D, ci restringiamo prima all'insieme

$$\Gamma_1 = \left\{(x, y) \ : \ x \geq 0, \ 4x^2 + y^2 = 1\right\}$$

e usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con la funzione $g_1(x, y) = 4x^2 + y^2$ con $x > 0$ e $y \in (-1, 1)$. Dobbiamo trovare soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \, \nabla g_1 \\ g_1(x, y) = 1 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \, 8x \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \, 2y \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

che ammette come soluzione con $x > 0$ e $y \in (-1, 1)$ l'unico punto $Q_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ con $\lambda = \frac{1}{4}$.

Studiamo poi il secondo insieme del bordo di D, ossia l'insieme

$$\Gamma_2 = \left\{(x, y) \ : \ x \geq 0, \ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\right\}$$

e usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con la funzione $g_2(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ con $x > 0$ e $y \in (-1, 1)$. Dobbiamo trovare soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \, \nabla g_2 \\ g_2(x, y) = 1 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \, \frac{x}{2} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \, 2y \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$

che ammette come soluzione con $x > 0$ e $y \in (-1, 1)$ l'unico punto $Q_2 = (2, 0)$ con $\lambda = 1$.

In questo caso ci sono due spigoli del bordo, i punti $Q_3 = (0, -1)$ e $Q_4 = (0, 1)$.

Quindi dobbiamo confrontare i quattro valori

$$f(Q_1) = \frac{1}{2}, \ f(Q_2) = 2, \ f(Q_3) = 1, \ f(Q_4) = 1$$

e concludiamo

$$\max_D f = 2, \quad \min_D f = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2. Data la curva

$$\gamma(t) = (\cos t + \sin t, \ 2 \sin t - 1) \,, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

i) dire se è una curva regolare;

La parametrizzazione della curva è una funzione di classe C^1 sul dominio. Dobbiamo quindi cercare se esistono valori in $(0, 2\pi)$ in cui il vettore derivata $\gamma'(t)$ si annulla. Calcoliamo

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t + \cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

che non si annulla, infatti il sistema

$$\begin{cases} -\sin t + \cos t = 0 \\ 2\cos t = 0 \end{cases}$$

non ammette soluzioni. Quindi la curva è regolare.

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno Γ della curva nel punto $P = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0\right)$;

Poniamo innanzitutto $P = \gamma(t_0)$ da cui ricaviamo $t_0 = \frac{\pi}{6}$. La retta tangente a Γ in P ha allora vettori tangente e normale

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad n(t_0) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana della retta tangente a Γ in P è allora

$$-\sqrt{3}\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,(y-0) = 0$$

iii) calcolare il lavoro che il campo

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{(x-5)^2+y^2} \\ \frac{x-5}{(x-5)^2+y^2} \end{pmatrix}$$

compie lungo la curva γ;

Possiamo applicare il Teorema del Rotore se valgono le seguenti condizioni (le ipotesi del teorema): il campo deve essere differenziabile; la curva deve essere chiusa, di classe C^1 a tratti e orientata positivamente; la parte interna U della curva deve essere contenuta nel dominio del campo.

Verifichiamo le condizioni nel nostro caso. Il campo è differenziabile perché le sue componenti si ottengono come composizione di funzioni differenziabili e ha dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(5,0)\}$. La curva è chiusa perché $\gamma(0) = (1, -1) = \gamma(2\pi)$, è di classe C^1 perché le sue componenti si ottengono come composizione di funzioni di classe C^1, e l'orientazione per adesso la possiamo ignorare perché cambierebbe solo il segno. Infine bisogna verificare che $(5,0) \notin U$. Per far questo basta osservare che $\max_t x(t) \leq 2$ e quindi $(5,0)$ non può essere nella parte interna della curva.

Applichiamo quindi il Teorema del Rotore e concludiamo che

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \iint_U rot(\mathbf{F})\, dxdy = 0$$

iv) calcolare il lavoro che il campo $\mathbf{F}$ del punto precedente compie lungo l'insieme $\Gamma \cap \{y \geq 0\}$, dove Γ è il sostegno della curva γ.

Abbiamo osservato che il sostegno Γ è contenuto nel semipiano $\Omega = \{x \leq 2\}$, che è un insieme semplicemente connesso. Se consideriamo quindi il campo $\mathbf{F}$ ristretto a Ω, allora essendo $\mathbf{F}$ irrotazionale otteniamo che $\mathbf{F}$ su Ω è un campo conservativo.

Consideriamo l'insieme $\Gamma \cap \{y \geq 0\}$ rappresentato nella figura 3.

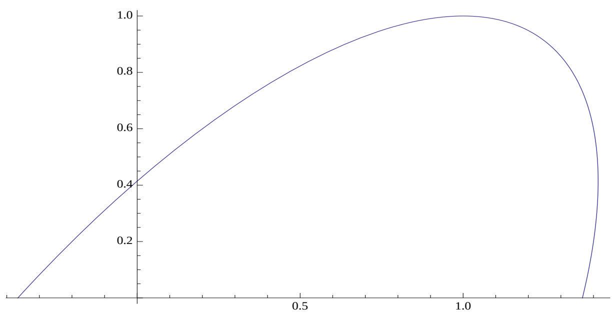

Figure 3: L'insieme $\Gamma \cap \{y \geq 0\}$

Chiamando $P_1 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ e $P_2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ i punti di intersezione dell'insieme con l'asse x, dalle proprietà dei campi conservativi possiamo concludere che il lavoro che il campo $\mathbf{F}$ compie lungo l'insieme $\Gamma \cap \{y \geq 0\}$ è uguale al lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = (-t, 0) \qquad t \in \left[-\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$$

quindi uguale a

$$L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = \int_{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} < \mathbf{F}(\tilde{\gamma}(t)), \tilde{\gamma}'(t) > \, dt = 0$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\iint_\Omega \log(x^2 + y^2)\, dxdy \qquad \text{con} \qquad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq -y,\ y \geq x,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

L'insieme Ω su cui integrare la funzione $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$ è quello nella figura 4.

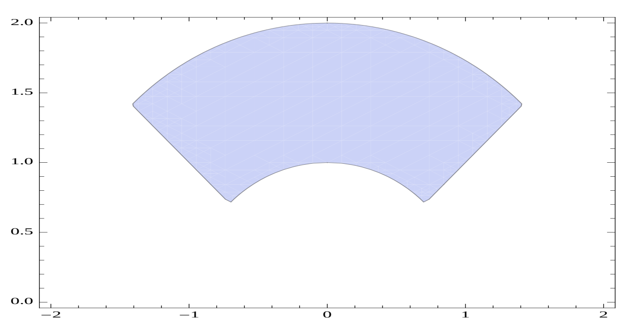

Figure 4: L'insieme Ω

La forma di Ω e la funzione suggeriscono di cambiare variabili nell'integrale e usare le coordinate polari. Poniamo quindi $x(\rho, \theta) = \rho\cos\theta$ e $y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$, con $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, e sostituendo in Ω otteniamo che l'insieme su cui integrare rispetto alle variabili (ρ, θ) è l'insieme D dato da

$$D = \{(\rho,\theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \ : \ \cos\theta \geq -\sin\theta,\ \sin\theta \geq \cos\theta,\ 1 \leq \rho \leq 2\} = \left\{(\rho,\theta) \ : \ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4},\ 1 \leq \rho \leq 2\right\}$$

Per l'integrale otteniamo quindi

$$\iint_{\Omega} \log(x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{D} \rho\,\log(\rho^2)\,d\rho d\theta = \frac{\pi}{2}\int_1^2 \rho\,\log(\rho^2)\,d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^4 \log t\,dt = \frac{\pi}{4}\,(t\log t - t)\Big|_1^4 = \frac{\pi}{4}\,(4\log 4 - 3)$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito B del 22-07-2010

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (11 punti) Per la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

i) determinare il dominio, disegnare un grafico approssimativo e dire in quali punti è differenziabile;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 0,\ x^2+4y^2 \geq 1,\ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}.$$

Esercizio 2. (15 punti) Data la curva

$$\gamma(t) = (2\cos t - 1,\ \sin t + \cos t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

i) dire se è una curva regolare;

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno Γ della curva nel punto $P = \left(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$;

iii) calcolare il lavoro che il campo

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y-5}{x^2+(y-5)^2} \\ \frac{x}{x^2+(y-5)^2} \end{pmatrix}$$

compie lungo la curva γ;

iv) calcolare il lavoro che il campo $\mathbf{F}$ del punto precedente compie lungo l'insieme $\Gamma \cap \{x \geq 0\}$, dove Γ è il sostegno della curva γ.

Esercizio 3. (8 punti) Calcolare

$$\iint_\Omega \log(x^2+y^2)\,dxdy \qquad \text{con} \qquad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq y,\ y \geq -x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

Svolgimento - B

Esercizio 1. Per la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

i) determinare il dominio, disegnare un grafico approssimativo e dire in quali punti è differenziabile;

Il dominio della funzione è l'insieme

$$\text{Dominio} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \geq 0\right\} = \mathbb{R}^2$$

e il grafico è l'insieme

$$\text{Grafico} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

che è un cono ed è disegnato nella figura 5.

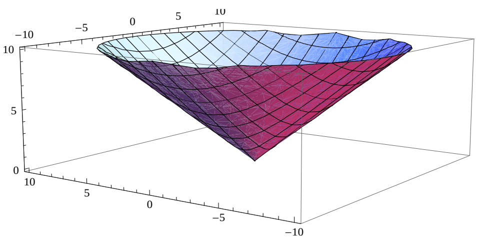

Figure 5: Il grafico della funzione f

Sappiamo che il cono non ammette piano tangente nel vertice, quindi possiamo concludere che la funzione f non è differenziabile nel punto $(0,0)$. Lo studio completo della differenziabilità per la funzione f si ottiene interpretando f come la composizione di due funzioni

$$g(x,y) = x^2+y^2, \qquad h(t) = \sqrt{t} \quad \text{con} \quad f = h \circ g$$

La funzione g ha come dominio $\mathbb{R}^2$ ed essendo un polinomio è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$, mentre la funzione h ha come dominio $\{t \geq 0\}$ ed è differenziabile per $t > 0$. Quindi dal teorema di differenziabilità delle funzioni composte otteniamo che f è differenziabile in tutti i punti in cui $x^2+y^2 > 0$ quindi su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per studiare il problema nell'origine possiamo vedere se esistono le derivate parziali (condizione necessaria per la differenziabilità). Vediamo se esiste la derivata parziale rispetto a x in $(0,0)$. Dovrebbe esistere il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0)+t(1,0)\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

che invece non esiste. Quindi come avevamo già dedotto dal grafico, la funzione f non è differenziabile in $(0,0)$.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 0, \ x^2+4y^2 \geq 1, \ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}.$$

Dobbiamo prendere in considerazione i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione. L'insieme D è indicato nella figura 6.

Non ci sono punti critici di f né punti di non differenziabilità di f interni a D.

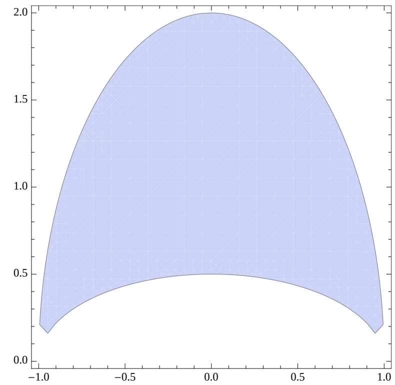

Figure 6: L'insieme D

Per studiare i punti critici vincolati al bordo di D, ci restringiamo prima all'insieme

$$\Gamma_1 = \big\{(x, y) \ : \ y \geq 0, \ x^2 + 4y^2 = 1\big\}$$

e usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con la funzione $g_1(x, y) = x^2 + 4y^2$ con $y > 0$ e $x \in (-1, 1)$. Dobbiamo trovare soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \, \nabla g_1 \\ g_1(x, y) = 1 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \, 2x \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \, 8y \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

che ammette come soluzione con $y > 0$ e $x \in (-1, 1)$ l'unico punto $Q_1 = \big(0, \frac{1}{2}\big)$ con $\lambda = \frac{1}{4}$.

Studiamo poi il secondo insieme del bordo di D, ossia l'insieme

$$\Gamma_2 = \left\{(x, y) \ : \ y \geq 0, \ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$$

e usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con la funzione $g_2(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$ con $y > 0$ e $x \in (-1, 1)$. Dobbiamo trovare soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \, \nabla g_2 \\ g_2(x, y) = 1 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \, 2x \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \, 2\frac{y}{2} \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

che ammette come soluzione con $y > 0$ e $x \in (-1, 1)$ l'unico punto $Q_2 = (0, 2)$ con $\lambda = 1$.

In questo caso ci sono due spigoli del bordo, i punti $Q_3 = (-1, 0)$ e $Q_4 = (1, 0)$.

Quindi dobbiamo confrontare i quattro valori

$$f(Q_1) = \frac{1}{2}, \ f(Q_2) = 2, \ f(Q_3) = 1, \ f(Q_4) = 1$$

e concludiamo

$$\max_D f = 2, \quad \min_D f = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2. Data la curva

$$\gamma(t) = (2\cos t - 1, \ \sin t + \cos t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

i) dire se è una curva regolare;

La parametrizzazione della curva è una funzione di classe C^1 sul dominio. Dobbiamo quindi cercare se esistono valori in $(0, 2\pi)$ in cui il vettore derivata $\gamma'(t)$ si annulla. Calcoliamo

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

che non si annulla, infatti il sistema

$$\begin{cases} -2\sin t = 0 \\ \cos t - \sin t = 0 \end{cases}$$

non ammette soluzioni. Quindi la curva è regolare.

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno Γ della curva nel punto $P = \left(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$;

Poniamo innanzitutto $P = \gamma(t_0)$ da cui ricaviamo $t_0 = \frac{\pi}{3}$. La retta tangente a Γ in P ha allora vettori tangente e normale

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad n(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana della retta tangente a Γ in P è allora

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2}\,(x-0) + \sqrt{3}\left(y - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

iii) calcolare il lavoro che il campo

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y-5}{x^2+(y-5)^2} \\ \frac{x}{x^2+(y-5)^2} \end{pmatrix}$$

compie lungo la curva γ;

Possiamo applicare il Teorema del Rotore se valgono le seguenti condizioni (le ipotesi del teorema): il campo deve essere differenziabile; la curva deve essere chiusa, di classe C^1 a tratti e orientata positivamente; la parte interna U della curva deve essere contenuta nel dominio del campo.

Verifichiamo le condizioni nel nostro caso. Il campo è differenziabile perché le sue componenti si ottengono come composizione di funzioni differenziabili e ha dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 5)\}$. La curva è chiusa perché $\gamma(0) = (1,\, 1) = \gamma(2\pi)$, è di classe C^1 perché le sue componenti si ottengono come composizione di funzioni di classe C^1, e l'orientazione per adesso la possiamo ignorare perché cambierebbe solo il segno. Infine bisogna verificare che $(0, 5) \notin U$. Per far questo basta osservare che $\max_t\, y(t) \leq 2$ e quindi $(0, 5)$ non può essere nella parte interna della curva.

Applichiamo quindi il Teorema del Rotore e concludiamo che

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \iint_U rot(\mathbf{F})\, dxdy = 0$$

iv) calcolare il lavoro che il campo $\mathbf{F}$ del punto precedente compie lungo l'insieme $\Gamma \cap \{x \geq 0\}$, dove Γ è il sostegno della curva γ.

Abbiamo osservato che il sostegno Γ è contenuto nel semipiano $\Omega = \{y \leq 2\}$, che è un insieme semplicemente connesso. Se consideriamo quindi il campo $\mathbf{F}$ ristretto a Ω, allora essendo $\mathbf{F}$ irrotazionale otteniamo che $\mathbf{F}$ su Ω è un campo conservativo.

Consideriamo l'insieme $\Gamma \cap \{y \geq 0\}$ rappresentato nella figura 7.

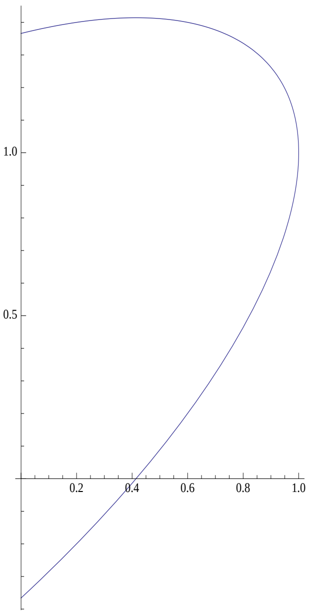

Figure 7: L'insieme $\Gamma \cap \{y \geq 0\}$

Chiamando $P_1 = \left(0, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ e $P_2 = \left(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ i punti di intersezione dell'insieme con l'asse y, dalle proprietà dei campi conservativi possiamo concludere che il lavoro che il campo $\mathbf{F}$ compie lungo l'insieme $\Gamma \cap \{x \geq 0\}$ è uguale al lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = (0, t) \qquad t \in \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$$

quindi uguale a

$$L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = \int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} < \mathbf{F}(\tilde{\gamma}(t)), \tilde{\gamma}'(t) > \, dt = 0$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\iint_\Omega \log(x^2 + y^2)\, dxdy \qquad \text{con} \qquad \Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x \geq y,\ y \geq -x,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

L'insieme Ω su cui integrare la funzione $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ è quello nella figura 8.

La forma di Ω e la funzione suggeriscono di cambiare variabili nell'integrale e usare le coordinate polari. Poniamo quindi $x(\rho, \theta) = \rho \cos\theta$ e $y(\rho, \theta) = \rho \sin\theta$, con $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, e sostituendo in Ω otteniamo che l'insieme su cui integrare rispetto alle variabili (ρ, θ) è l'insieme D dato da

$$D = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \ :\ \cos\theta \geq \sin\theta,\ \sin\theta \geq -\cos\theta,\ 1 \leq \rho \leq 2\} = \left\{(\rho, \theta) \ :\ -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq \rho \leq 2\right\}$$

Per l'integrale otteniamo quindi

$$\iint_\Omega \log(x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_D \rho \log(\rho^2)\, d\rho d\theta = \frac{\pi}{2} \int_1^2 \rho \log(\rho^2)\, d\rho =$$

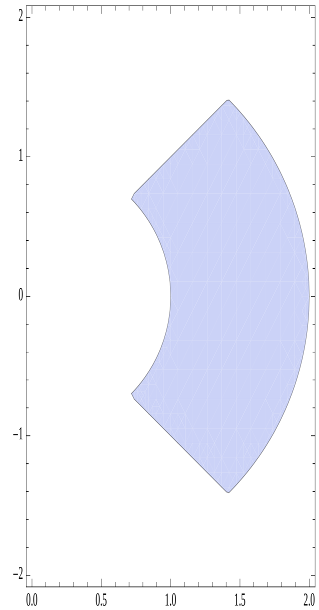

Figure 8: L'insieme Ω

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^4 \log t \, dt = \frac{\pi}{4} \left. (t \log t - t) \right|_1^4 = \frac{\pi}{4} (4 \log 4 - 3)$$