

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 22-02-2023

Esercizio 1. (10 punti) Per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -\varepsilon y - (1 - \varepsilon)y^3 - 5x^5 \\ \dot{y} = 3x - y^3 - 2\varepsilon y^5 \end{cases}$$

studiare la stabilità del punto fisso $P = (0, 0)$ nei casi:

- (a) $\varepsilon < 0$;
- (b) $\varepsilon = 1$;
- (c) $\varepsilon = 0$;
- (d) $\varepsilon \in (0, 1)$.

Esercizio 2. (10 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \sin x \\ \dot{y} = (\mu - y)(y - \cos x) \end{cases}$$

al variare di $\mu \in (0, +\infty)$:

- (a) trovare i punti fissi al variare di μ ;
- (b) disegnare un possibile ritratto di fase per $\mu = 2\sqrt{2}$ e per $\mu = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la famiglia di trasformazioni continue

$$f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f_\lambda(x) = \begin{cases} 4\lambda x(1-x), & \text{per } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2\lambda(1-x), & \text{per } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in (0, 1]$.

- (a) Trovare i punti fissi e studiarne la stabilità.
- (b) Discutere l'esistenza di un'orbita periodica di periodo minimo 2 al variare di λ .
- (c) Discutere l'esistenza di un'orbita periodica di periodo minimo 7 al variare di λ .

ESERCIZIO

1

$$\begin{cases} \dot{x} = -\varepsilon y - (1-\varepsilon)y^3 - 5x^5 \\ \dot{y} = 3x - y^3 - 2\varepsilon y^5 \end{cases}, \quad P = (0,0)$$

Per studiare la stabilità di P calcoliamo $JF(P)$, si ha

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} -25x^4 & -\varepsilon - 3(1-\varepsilon)y^2 \\ 3 & -3y^2 - 10\varepsilon y^4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad JF(P) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) $\varepsilon < 0$

In questo caso $\det JF(P) = 3\varepsilon < 0$, quindi P è un punto fisso iperbolico di tipo sella, e di conseguenza è instabile.

 $\varepsilon \geq 0$

In questo caso $\det JF(P) = 3\varepsilon \geq 0$ e $\text{tr} JF(P) = 0$, quindi P è un punto fisso non iperbolico, e per studiarne la stabilità non basta lo studio di $JF(P)$.

(b) $\varepsilon = 1$

Cerchiamo di trovare una funzione di Lyapunov per P .

L'esempio più semplice $V(x,y) = ax^2 + by^2$, con $a, b > 0$, verifica:

$$\begin{aligned} - & V(x,y) \geq V(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ - & \dot{V}(x,y) = 2ax(-y - 5x^5) + 2by(3x - y^3 - 2y^5) \\ & = (6b - 2\varepsilon)xy - 2ax^6 - 2by^4 - 4by^6 \end{aligned}$$

Quindi se $a = 3b$ si ha $\dot{V}(x,y) < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Dunque ogni $V(x,y) = 3bx^2 + by^2$ con $b > 0$ è una funzione di Lyapunov stretta per P in \mathbb{R}^2 , e di conseguenza per il secondo teorema di stabilità di Lyapunov, si ha che P è asintoticamente stabile.

(c) $\varepsilon = 0$

Come nel caso (b) cerchiamo una funzione di Lyapunov.

Poniamo $V(x,y) = ax^{2m} + by^{2m}$ con $a, b > 0$ e $m \in \mathbb{N}$. Si ha:

$$\begin{aligned} - & V(x,y) \geq V(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ - & \dot{V}(x,y) = 2ma x^{2m-1}(-y^3 - 5x^5) + 2mb y^{2m-1}(3x - y^3) \end{aligned}$$

$$= 6mbxy^{2m-1} - 2ma x^{2m-1}y^3 - 10ma x^{2m+4} - 2mb y^{2m+2}$$

I termini da provare ed eliminare sono quelli con esponenti dispari, quindi componendo

$$6mb = 2ma, \quad 1 = 2m-1, \quad 2m-1 = 3$$

si ottiene una funzione che verifica $\dot{V}(x,y) < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Quindi $V(x,y) = 6bx^2 + by^4$ con $b > 0$ è una funzione di Lyapunov stretta per P in \mathbb{R}^2 , e come detto sopra si ha che P è asintoticamente stabile.

(d) $\varepsilon \in (0,1)$ I casi (b) e (c) ci suggeriscono che una funzione di Lyapunov stretta per P si può ottenere in questo caso provando una funzione del tipo

$$V(x,y) = ax^2 + by^2 + cy^4, \quad \text{con } a, b, c > 0.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} - & V(x,y) \geq V(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ - & \dot{V}(x,y) = 2ax(-\varepsilon y - (1-\varepsilon)y^3 - 5x^5) + (2by + 4cy^3)(3x - y^3 - 2\varepsilon y^5) = \\ & = (6b - 2a\varepsilon)xy + (12c - 2a(1-\varepsilon))xy^3 - 10ax^6 - 2by^4 \\ & \quad - (ab\varepsilon + 4c)y^6 - 8c\varepsilon y^8 \end{aligned}$$

ed eliminando i termini con esponenti dispari, quindi ponendo

$$3b = a\varepsilon, \quad 6c = a(1-\varepsilon)$$

si ottiene una funzione che verifica $\dot{V}(x,y) < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Quindi $V(x,y) = ax^2 + \frac{\varepsilon}{3}ay^2 + \frac{1-\varepsilon}{6}ay^4$ con $a > 0$ è una funzione di Lyapunov stretta per P in \mathbb{R}^2 , e come sopra segue che anche in questo caso P è asintoticamente stabile.

ESERCIZIO

2

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \sin x \\ \dot{y} = (\mu - y)(y - \cos x) \end{cases}, \quad \mu \in (0, +\infty)$$

Osserviamo preliminarmente che la trasformazione $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (x(t) + 2\pi, y(t))$ manda soluzioni in soluzioni, infatti

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) = y(t) - \sin x(t) = \tilde{y}(t) - \sin(x(t) + 2\pi) = \tilde{y}(t) - \sin \tilde{x}(t)$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \dot{y}(t) = (\mu - y(t))(y(t) - \cos x(t)) = (\mu - \tilde{y}(t))(\tilde{y}(t) - \cos(x(t) + 2\pi)) = (\mu - \tilde{y}(t))(\tilde{y}(t) - \cos \tilde{x}(t))$$

e quindi ci restringiamo a lavorare nell'insieme $\{x \in [-\pi, \pi], y \in \mathbb{R}\}$, e quello che otteniamo si ripete periodicamente rispetto alla x .

(a) **Punti fissi.** Cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y - \sin x = 0 \\ (\mu - y)(y - \cos x) = 0 \end{cases} \quad \text{con } x \in [-\pi, \pi]$$

Ponendo $y = \sin x$ nella seconda equazione, si trova

$$\mu = \sin x \quad \vee \quad \sin x = \cos x$$

Quindi:

$$\mu > 1$$

le uniche soluzioni sono $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = -\frac{3}{4}\pi$, da cui troviamo due soli punti fissi:

$$P_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad P_2 = \left(-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\mu = 1$$

le soluzioni sono quelle di prima, $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = -\frac{3}{4}\pi$, e cui si aggiunge $x = \frac{\pi}{2}$, quindi i punti fissi sono

$$P_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad P_2 = \left(-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad P_3 = \left(\frac{\pi}{2}, 1 \right)$$

$$\mu \in (0, 1)$$

le soluzioni sono le due di prima, $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = -\frac{3}{4}\pi$, e cui si aggiungono $x = \arcsin \mu \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $x = \pi - \arcsin \mu \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Osserviamo inoltre che $\arcsin \mu = \frac{\pi}{4}$ se $\mu = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi i

punti fissi diversi saranno:

$$P_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad P_2 = \left(-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad P_3 = (\arcsin \mu, \mu)$$

e $P_4 = (\pi - \arcsin \mu, \mu)$ se $\mu \in (0, 1) \setminus \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

$$P_1 = P_3 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad P_2 = \left(-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad P_4 = \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{se } \underline{\mu = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(b) Ritorni di fase

- Stabilità lineare dei punti fissi. Studiamo JF. Si ha

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 1 \\ (\mu - y) \sin x & \mu - 2y + \cos x \end{pmatrix} \quad \text{e quindi:}$$

- $P_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ verifica

$$JF(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\mu - \frac{\sqrt{2}}{2}) & \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det JF(P_1) = -\sqrt{2} \left(\mu - \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \text{tr } JF(P_1) = \mu - \sqrt{2}$$

- $P_2 = \left(-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ verifica

$$JF(P_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(\mu + \frac{\sqrt{2}}{2}) & \mu + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det JF(P_2) = \sqrt{2} \left(\mu + \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \text{tr } JF(P_2) = \mu + \sqrt{2}$$

- $P_3 = (\arcsin \mu, \mu)$ per $\mu \in (0, 1]$ verifica

$$JF(P_3) = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\mu^2} & 1 \\ 0 & -\mu + \sqrt{1-\mu^2} \end{pmatrix}$$

$$\det JF(P_3) = (\mu - \sqrt{1-\mu^2}) \sqrt{1-\mu^2}, \quad \text{tr } JF(P_3) = -\mu$$

- $P_4 = (\pi - \arcsin \mu, \mu)$ per $\mu \in (0, 1]$ verifica

$$JF(P_4) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\mu^2} & 1 \\ 0 & -\mu - \sqrt{1-\mu^2} \end{pmatrix}$$

$$\det JF(P_4) = -(\mu + \sqrt{1-\mu^2}) \sqrt{1-\mu^2}, \quad \text{tr } JF(P_4) = -\mu$$

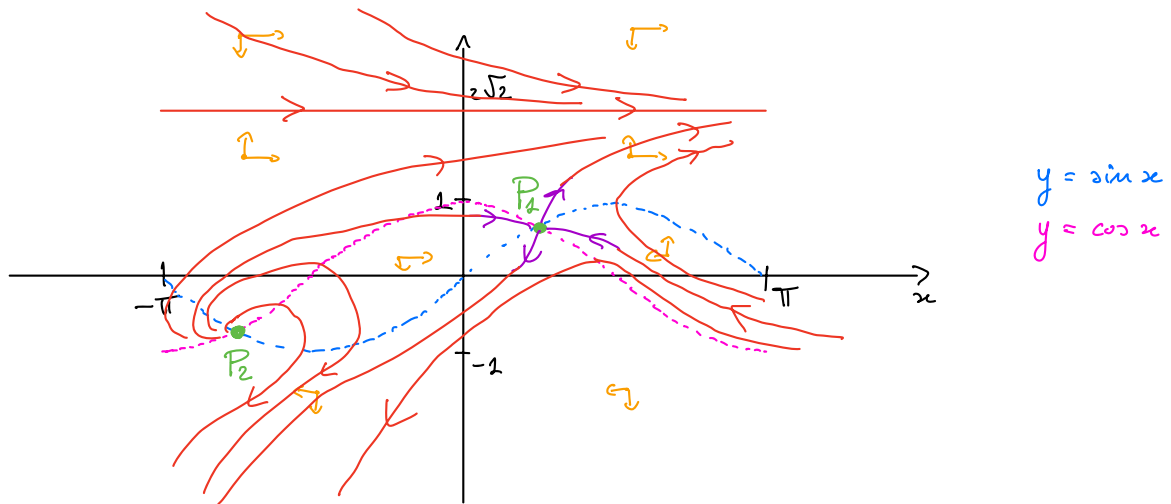
• Insieme invariante Si verifica che la retta $\{y=\mu\}$ è invariante $\forall \mu$, basta usare la funzione $I(x,y)=y$ sull'insieme di livelli I_μ .

• Orbite periodiche La teoria dell'indice di Poincaré ci dice intorno a quali dei punti fissi le orbite potrebbero esistere. Tuttavia, calcolando $\text{div } F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y - \sin x) + \frac{\partial}{\partial y}[(\mu - y)(y - \cos x)] = \mu - 2y$

otteniamo che non possono esistere orbite periodiche contenute interamente in $U = \{y < \frac{\mu}{2}\}$ o in $\tilde{U} = \{y > \frac{\mu}{2}\}$. Non possiamo per adesso negare l'esistenza di orbite che si avvicinano un po' in U e un po' in \tilde{U} .

$\mu = 2\sqrt{2}$ Da questo visto, in questo caso abbiamo due punti fissi distinti, P_1 e P_2 , che sono iperbolici e verificano:

- $\det JF(P_1) = -3$, $\text{tr } JF(P_1) = \sqrt{2}$, quindi P_1 è un punto di sella;
- $\det JF(P_2) = 5$, $\text{tr } JF(P_2) = 3\sqrt{2}$, quindi P_2 è un fuoco instabile.

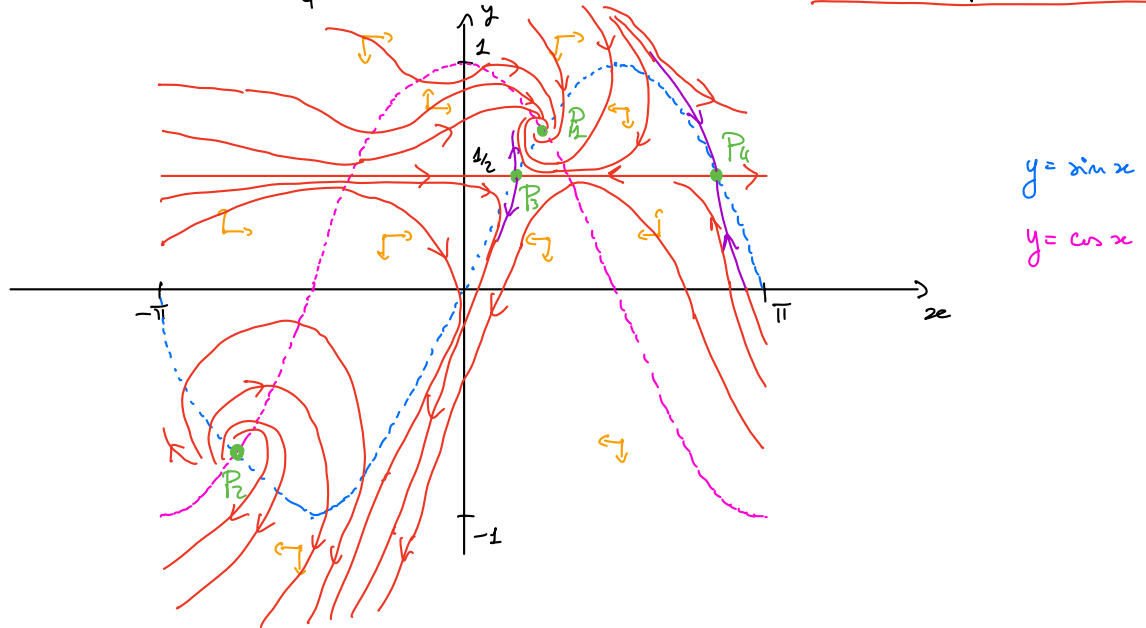


Sappiamo che le orbite periodiche possono esistere solo intorno a P_2 e non sono interamente contenute in $U = \{y < \sqrt{2}\}$. Ma per l'esistenza della retta invariante $\{y = 2\sqrt{2}\}$, ogni orbita periodica deve essere contenuta in $\{y < 2\sqrt{2}\}$. D'altra parte $\dot{y}|_{\{\sqrt{2} \leq y < 2\sqrt{2}\}} > 0$, quindi non possono esistere orbite periodiche.

$\mu = 1/2$ Da questo visto, in questo caso abbiamo quattro punti fissi

distinti, P_1, P_2, P_3 e P_4 , che sono iperbolici e verificano:

- $\det JF(P_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)$, $\text{tr} JF(P_1) = \frac{1}{2}-\sqrt{2}$, quindi P_1 è un fuoco stabile
- $\det JF(P_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)$, $\text{tr} JF(P_2) = \frac{1}{2}+\sqrt{2}$, quindi P_2 è un fuoco instabile.
- $\det JF(P_3) = -\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}}{4}$, $\text{tr} JF(P_3) = -\frac{1}{2}$, quindi P_3 è un punto di sella
- $\det JF(P_4) = -\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}}{4}$, $\text{tr} JF(P_4) = -\frac{1}{2}$, quindi P_4 è un punto di sella



Anche in questo caso non ci sono orbite periodiche. Infatti intorno a P_2 non possono esistere perché sarebbero interamente contenute in $\tilde{U} = \{y > \frac{1}{4}\}$ per via dell'esistenza della retta invariante $\{y = \frac{1}{2}\}$.

Se ci fosse un'orbita periodica intorno a P_2 dovrebbe non essere contenuta interamente in $U = \{y < \frac{1}{4}\}$, il che implica che dovrebbe intersecare il semipiano $\{x > -\frac{\pi}{2}\}$. A questo punto il segno del campo implica che dovrebbe passare anche dal semipiano $\{y < -1\}$, ma $\dot{y}|_{\{y < -1\}} < 0$. Dunque non può esistere.

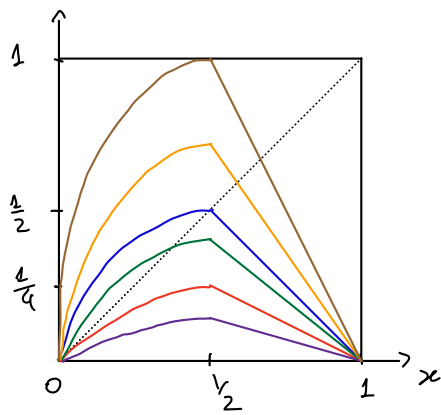
ESERCIZIO

3

$$f_{\lambda}(x) = \begin{cases} 4\lambda x(1-x), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2\lambda(1-x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \quad \lambda \in (0, 1]$$

(a) Punti fissi e loro stabilità

Disegnare il grafico di f_{λ}



$$\lambda \in (0, \frac{1}{4}) \quad \lambda = \frac{1}{4}$$

$$\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda \in (\frac{1}{2}, 1) \quad \lambda = 1$$

Si osserva che f_λ raggiunge il suo massimo in $\bar{x} = \frac{1}{2}$ e si ha $f_\lambda(\frac{1}{2}) = \lambda$.

Per trovare i punti fissi dobbiamo trovare le soluzioni di

$$\begin{cases} 4\lambda x(1-x) = x \\ x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2\lambda(1-x) = x \\ x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dal primo sistema si trovano i punti fissi

$$\underline{P_1 = 0 \quad \forall \lambda \in (0, 1]}, \quad \underline{P_2 = 1 - \frac{1}{4\lambda} \quad \text{per } \lambda \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]}$$

con $\underline{P_2 = P_2}$ se $\lambda = \frac{1}{4}$, mentre dal secondo sistema si trova

$$\underline{P_3 = \frac{2\lambda}{1+2\lambda} \quad \text{per } \lambda \in [\frac{1}{2}, 1]}$$

con $\underline{P_2 = P_3 = \frac{1}{2}}$ se $\lambda = \frac{1}{2}$

Per studiare la stabilità di questi punti, usiamo la derivata di f_λ quando è possibile.

$\boxed{P_1 = 0}$ Si ha $f'_\lambda(P_1) = 4\lambda(1-2x)|_{x=0} = 4\lambda$, dunque per $\lambda \in (0, 1]$

$|4\lambda| < 1 \Leftrightarrow \lambda \in (0, \frac{1}{4})$ e il punto \bar{x} attrattivo

$|4\lambda| > 1 \Leftrightarrow \lambda \in (\frac{1}{4}, 1]$ e il punto \bar{x} repulsivo

per $\lambda = \frac{1}{4}$, si ha $f''_\lambda(P_1) = -8\lambda|_{x=0} = -2 < 0$ e il punto \bar{x} semi-attrattivo da destra, quindi attrattivo.

$\boxed{P_2 = 1 - \frac{1}{4\lambda} \quad \text{con } \lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]}$ Si ha $f'_\lambda(P_2) = 4\lambda(1-2x)|_{x=1-\frac{1}{4\lambda}} = 2-4\lambda$ se

$\lambda \neq \frac{1}{2}$, e $f'_\lambda(P_2)$ non esiste per $\lambda = \frac{1}{2}$.

$|2-4\lambda| < 1 \Leftrightarrow \lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ e il punto è attrattivo

per $\lambda = \frac{1}{2}$, la derivata sinistra di f_λ in $P_2 = \frac{1}{2}$ è 0, quindi il punto è attrattivo da sinistra, e la funzione dei punti in $(\frac{1}{2}, 1]$ mostra che il punto ha un bacino di attrazione anche da destra. Quindi è globalmente attrattivo.

$$P_3 = \frac{2\lambda}{1+2\lambda} \text{ con } \lambda \in (\frac{1}{2}, 1] \text{ si ha } f'_\lambda(P_3) = -2\lambda \Big|_{x=\frac{2\lambda}{1+2\lambda}} = -2\lambda \text{ e}$$

$|-2\lambda| > 1 \Leftrightarrow \lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$ e il punto è repulsivo

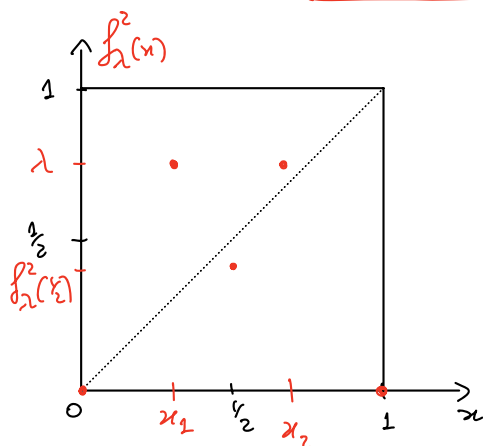
(b) Orbite di periodo minimo 2

Per trovare i valori di $\lambda \in [0, 1]$ per

cui esiste un'orbita di periodo minimo 2, studiamo come si comporta f_λ^2 per alcuni punti importanti, in modo da tracciare un grafico approssimativo di f_λ^2 . Se dimostrassimo l'esistenza di punti fissi di f_λ^2 diversi dai punti P_1, P_2 e P_3 di sopra, abbiamo mostrato l'esistenza di un'orbita di periodo minimo 2.

Iniziamo con l'osservare che non possono esistere orbite di periodo minimo 2 per $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$. In questo caso infatti è facile mostrare che $w(x)$ è un punto fisso $\forall x \in [0, 1]$.

Pensano quindi $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$. Esistono due punti $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$ e



$x_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ t.c. $f_\lambda(x_2) = f_\lambda(x_2) = \frac{1}{2}$. Quindi

$$f_\lambda^2(x_2) = f_\lambda^2(x_2) = \lambda > \frac{1}{2}$$

$$\text{Quindi } f_\lambda^2(x_2) > \frac{1}{2} > x_2.$$

Inoltre si può calcolare che $x_2 = 1 - \frac{1}{4\lambda}$ e

$$\lambda = f_\lambda^2(x_2) > 1 - \frac{1}{4\lambda} = x_2 \text{ per } \lambda \in (\frac{1}{2}, 1].$$

$$\text{Infine } f_\lambda^2(\frac{1}{2}) = f_\lambda^2(\lambda) = 2\lambda(1-\lambda) < \frac{1}{2}$$

per $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$, e $f_\lambda^2(0) = f_\lambda^2(1) = 0$. Quindi f_λ^2 ha almeno

quattro punti fissi. Visto che f_λ ha due punti fissi per $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$

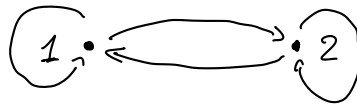
esiste almeno un'orbita periodica di periodo minimo ≥ 7 $\forall \lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$.

(c) Orbite di periodo minimo 7

In questo caso non riusciamo ad essere

altrettanto precisi.

Poniamo $\lambda = 1$. Se $J_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $J_2 = [\frac{1}{2}, 1]$, il f_λ -grafo associato alla partizione $J = \{J_1, J_2\}$ è



Quindi esiste un'orbita periodica di periodo minimo 3 che si trova utilizzando il cammino ammissibile $J_1 J_2 J_1$ e osservando che $J_1 \cap J_2 = \{\frac{1}{2}\}$ verifica $f_\lambda^3(\frac{1}{2}) = 0$.

Concludiamo, applicando il Teorema di Sharkovski che la trasformazione continua f_λ ha per $\lambda = 1$ orbite periodiche di periodo minimo $n \forall n \geq 1$. Dunque f_λ^3 è una trasformazione continua che per $\lambda = 1$ ha almeno tre punti fissi che non sono punti fissi di f_λ . Poiché f_λ^3 dipende con continuità da λ , esiste $\bar{\lambda} \in (\frac{1}{2}, 1)$ per cui f_λ ha un'orbita di periodo minimo 3, e quindi di periodo minimo $n \forall n \geq 1$, per ogni $\lambda \in [\bar{\lambda}, 1]$.

Questo valore $\bar{\lambda}$ non rappresenta probabilmente il minimo dei valori $\tilde{\lambda}$ per cui $\forall \lambda \in [\tilde{\lambda}, 1]$ f_λ ha un'orbita di periodo minimo 7.