Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 21-03-2011

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x+y}}$$

i) determinare il dominio;

ii) trovare estremo superiore e inferiore;

iii) dimostrare che non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Esercizio 2. (10 punti) Dato l'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ x^2+y^2 \leq 2, \ y \geq \sqrt{x}\}$$

i) descrivere Ω in coordinate polari;

ii) calcolare

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2+y^2}\, dxdy$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie di rotazione

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = \Big(\log(1+z)\Big)^2\right\}$$

i) fare un disegno approssimativo di Σ;

ii) dire se esistono punti di Σ in cui non esiste il piano tangente a Σ;

iii) scrivere una parametrizzazione di Σ.

Svolgimento

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x+y}}$$

i) determinare il dominio;

Bisogna imporre che l'espressione sotto radice sia maggiore o uguale a zero, e che il denominatore non si annulli. Quindi si ottiene che il dominio è l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y > 0\right\}$$

ii) trovare estremo superiore e inferiore;

Calcoliamo innanzitutto alcuni limiti al bordo del dominio. Ad esempio ci restringiamo ai due assi e calcoliamo i limiti all'infinito. Troviamo

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{y\to\infty} f(0,y) = \lim_{y\to\infty} -\sqrt{y} = -\infty$$

Questi limiti sono sufficienti allora per concludere che

$$\inf_D f = -\infty \qquad \sup_D f = +\infty$$

iii) dimostrare che non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Se calcoliamo i limiti lungo le rette che passano per l'origine si trova ad esempio per $\lambda \in [0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+\lambda x}{\sqrt{x+\lambda x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x(1+\lambda)} = 0$$

Dobbiamo cercare allora un'altra curva passante per l'origine lungo cui il limite non sia zero. Scegliamo, usando la forma del dominio, $y = -x + x^2$. Si trova

$$\lim_{x\to 0^+} f(x, x^2-x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x-x^2}{\sqrt{x^2}} = 2$$

e la non esistenza del limite è dimostrata.

Esercizio 2. (10 punti) Dato l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ x^2+y^2 \leq 2, \ y \geq \sqrt{x}\right\}$$

i) descrivere Ω in coordinate polari;

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si scrive come

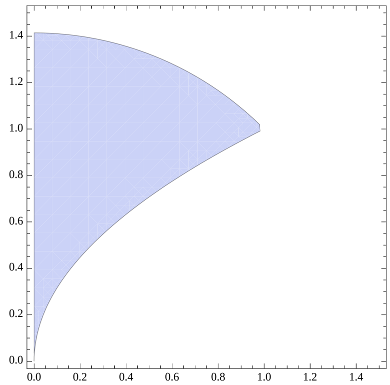

Figure 1: L'insieme Ω.

l'insieme

$$\Omega = \Big\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \ : \ \rho\cos\theta \geq 0,\ \rho^2 \leq 2,\ \rho\sin\theta \geq \sqrt{\rho\cos\theta}\Big\} =$$

$$= \Big\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \ : \ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \leq \rho \leq \sqrt{2}\Big\}$$

dove $\bar\theta = \frac{\pi}{4}$ si ottiene cercando la soluzione di $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \sqrt{2}$ nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$, oppure osservando che $\bar\theta$ è l'argomento in coordinate polari del punto $(\bar x, \bar y) = (1, 1)$, soluzione con $x > 0$ e $y > 0$ del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

ii) calcolare

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy$$

Usando le coordinate polari, l'integrale si risolve scrivendo

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{\sqrt{2}} \sin\theta\,d\rho\right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2}\,\sin\theta - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) d\theta =$$

$$= \Big(-\sqrt{2}\,\cos\theta - \log|\sin\theta|\Big)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\log 2$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie di rotazione

$$\Sigma = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = \Big(\log(1+z)\Big)^2\Big\}$$

i) fare un disegno approssimativo di Σ;

Essendo una superficie di rotazione, Σ si ottiene facendo ruotare il grafico di $y = |\log(1+z)|$, funzione definita per $z > -1$, intorno all'asse z. Si ottiene quindi la superficie in figura **??**

ii) dire se esistono punti di Σ in cui non esiste il piano tangente a Σ;

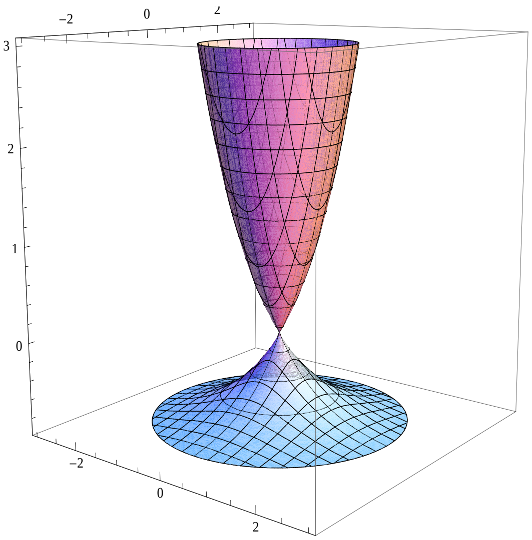

Figure 2: La superficie Σ.

Usando il corollario del Teorema del Dini, possiamo cercare se ci sono punti in cui si annulla il gradiente della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - \Big(\log(1+z)\Big)^2$. Si trova

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2\,\frac{\log(1+z)}{1+z} \end{pmatrix}$$

e quindi l'unico punto in cui si annulla è $P = (0,0,0) \in \Sigma$. Si conclude che nel punto P la superficie non ammette piano tangente, come si poteva intuire dal disegno.

iii) scrivere una parametrizzazione di Σ.

Scriviamo la parametrizzazione di Σ come superficie di rotazione. Ad esempio, ponendo $z = u > -1$ si scrive

$$\sigma : (-1, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \sigma(u,\theta) = \begin{pmatrix} |\log(1+u)|\cos\theta \\ |\log(1+u)|\sin\theta \\ u \end{pmatrix}$$