

Calcolo delle Probabilità e Statistica
Corso di Laurea in Informatica
Compito del 21-07-2021

Esercizio 1. (10 punti)

Nello scompartimento di un treno vi sono tre escursionisti che non si conoscevano precedentemente, diretti a un paesino svizzero: ognuno di essi ha riservato per conto proprio una camera d'albergo, scegliendo a caso tra i 5 alberghi presenti in quel paese, alberghi che indichiamo con le lettere $\{A, B, C, D, E\}$.

- (i) Qual è la probabilità che alloggino tutti e tre nello stesso albergo? È più probabile che alloggino in tre alberghi diversi o che esattamente due di loro si ritrovino nello stesso albergo?
- (ii) Sapendo che un escursionista ha scelto l'albergo A, qual è la probabilità che almeno un altro escursionista alloggi nell'albergo A?

Esercizio 2. (10 punti)

Sia X una variabile con densità esponenziale di parametro λ , ($\lambda > 0$) e sia $Y = e^X$.

- (i) Dire, in funzione del parametro λ , quali momenti possiede la variabile Y e calcolare questi momenti.
- (ii) Scrivere la densità e la funzione di ripartizione (o c.d.f.) della variabile Y . Dire quale legame intercorre tra la funzione di ripartizione della variabile X e quella della variabile Y .
- (iii) Scrivere una formula per il β -quantile di Y .

Esercizio 3. (10 punti)

Sono stati esaminati 100 barattoli da 100 g di confettura di frutta prodotta dalla ditta XYZ misurando gli antiossidanti aggiunti, ed è stata riscontrata una quantità di antiossidanti con media campionaria 2.2 g e deviazione standard campionaria di 0.9 g.

- (i) Considerando una fiducia al 95%, il valore 2.4 g è contenuto nell'intervallo di fiducia bilatero per la media di antiossidanti del campione? Qual è la precisione della stima con fiducia al 95%? (fornire opportune approssimazioni se i calcoli esatti non sono praticabili).
- (ii) La normativa nazionale stabilisce che il contenuto di antiossidanti aggiunti non deve superare il 2%, e la ditta XYZ afferma di essere in regola con questa normativa. Quale test si deve progettare per verificare l'affermazione della ditta, e qual è il relativo p -value? (di nuovo approssimare opportunamente i calcoli).

Esercizio 3 per programma precedente. (10 punti)

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & 1 - \lambda & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in [0, 1]$.

- (i) Dire per quali valori di λ , partendo dallo stato 1 al tempo 0, è più probabile trovarsi al tempo 2 nello stato 2 rispetto allo stato 3.
- (ii) Calcolare in funzione di λ , la probabilità di trovarsi nello stato 2 al tempo 3 partendo dallo stato 1 al tempo 0.
- (iii) Per quale valore di λ la probabilità invariante della catena è $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$? Giustificare il fatto che $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ non è una probabilità invariante per nessun valore di $\lambda \in [0, 1]$.