ESERCIZIO 1 Alfabeto $= \{A, B, C, D, E\}$

(i) Probabilità di scegliere lo stesso albergo?

$\Omega = \{$ parole di tre lettere $\}$

$\# \Omega = 5^3$

$X = \{AAA, BBB, CCC, DDD, EEE\}$

$\# X = 5$

$$\text{Prob} = \frac{\# X}{\# \Omega} = \frac{5}{5^3} = \frac{1}{25}$$

Prob di scegliere tre alberghi diversi?

Prob che esattamente due alloggino nello stesso albergo?

$Y = \{$ parole con tre lettere diverse $\}$

$Z = \{$ parole con esattamente due lettere uguali $\}$
$= \Omega \setminus (X \cup Y)$

$\# Y = 5 \cdot 4 \cdot 3$

$$\text{Prob (tre alb. div.)} = \frac{\# Y}{\# \Omega} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{5^3} = \frac{12}{25}$$

$$\text{Prob (esatt. due nello stesso alb)} = 1 - \left(\frac{1}{25} + \frac{12}{25}\right) = \frac{12}{25}$$

(ii) Prob che almeno due scelgano A sapendo che uno ha scelto A?

Prob(almeno due siano in A | uno è in A) =

$$= \frac{\text{Prob (almeno due in } A \cap \text{ uno in } A)}{\text{Prob (uno in } A)}$$

$X = \{$ parole che contengono $A\}$

$Y = \{$ parole che contengono almeno due $A\}$

$\# X = \# \Omega - \# \{$ parole che non contengono $A\} =$

$= 125 - 4^3 = 125 - 64 = 61$

$\# Y = \# \{$ parole con tre $A\} + \# \{$ parole con esatt. due $A\}$

$= 1 + 4 \cdot 3 = 13$

$$\text{Prob} = \frac{13/125}{61/125} = \frac{13}{61}$$

ESERCIZIO 2 $\quad X$ var. al. esp. con par $\lambda > 0$

$Y = e^X$

(i) $\quad E[Y^n] = \int_{\mathbb{R}} y^n f_Y(y)\, dy$

$= E[e^{nX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{nx} f_X(x)\, dx$

$$E[Y^n] = \int_0^{+\infty} \lambda e^{nx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(n-\lambda)x} dx < +\infty$$

$\iff n - \lambda < 0 \iff n < \lambda$

$$E[Y^n] = \lambda \left. \frac{e^{(n-\lambda)x}}{n-\lambda} \right|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - n}$$

(ii) $\quad Y = e^X = h(X)$ $\qquad h(t) = e^t$ inv. e deriv. su $(0,+\infty)$

$$h^{-1}(s) = \log s \quad , \quad s > 0$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{d h^{-1}}{dy}(y) \right| & , \quad y \in h(0,+\infty) = (1,+\infty) \\ 0 & , \quad \text{alt} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \log y} \cdot \frac{1}{y} = \lambda y^{-\lambda-1} , & y \in (1,+\infty) \\ 0 & , \quad \text{alt.} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\, dt = \begin{cases} 0 , & y < 1 \\ \int_1^y \lambda t^{-\lambda-1} dt , & y \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 , & y < 1 \\ 1 - y^{-\lambda} , & y \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) \underset{y>1}{=} P(X \leq \log y) = F_X(\log y)$$

(iii) $\quad \beta$-quantile di Y

r_β è l'unica soluz. di $F_Y(r_\beta) = \beta \qquad \forall \beta \in (0,1)$

$$1 - r_\beta^{-\lambda} = \beta \iff r_\beta = (1-\beta)^{-\frac{1}{\lambda}}$$

ESERCIZIO 3

$X_1, \dots, X_{100}$ $\quad \bar{x} = 2.2g$, $\bar{\sigma} = 0.9g$

(i) Fiducia $= 95\%$, $1-\alpha = 0.95$, $\alpha = 0.05$

Int. di fiducia bilatero per media con varianza ignota

$$I = \left[\bar{x} - \tau_{(1-\alpha/2, 99)} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{100}} , \bar{x} + \tau_{(1-\alpha/2, 99)} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{100}} \right] =$$

$$= \left[2.2 - \tau_{(0.975, 99)} \frac{0.9}{10} , 2.2 + \tau_{(0.975, 99)} \frac{0.9}{10} \right]$$

$$\tau_{(0.975, 99)} \sim 1.984$$

Precisione della stima $= \tau_{(0.975,99)} \frac{0.9}{10} \sim 0.17856$

$$2.4 \notin I = [2.2 - 0.17856 , 2.37856]$$

(ii) $X_1, \dots, X_{100}$ $\quad \bar{x} = \frac{2.2}{100} = 0.022 \quad \bar{\sigma} = \frac{0.9}{100} = 0.009$

$$H_0) \; m \leq m_0 = 0.02 \qquad H_1) \; m > 0.02$$

Regione critica $\quad C = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{\bar{\sigma}} (\bar{x} - m_0) > \tau_{(1-\alpha, 99)} \right\}$

L'ipotesi è accettata al livello α $\iff \frac{\sqrt{100}}{0.009} (0.022 - 0.02) \leq \tau_{(1-\alpha, 99)}$

P-value dei dati

$$\bar{\alpha} = 1 - F_{T(99)} \left(\frac{\sqrt{n}}{\bar{\sigma}} (\bar{x} - m_0) \right) = 1 - F_{T(99)} \left(\frac{10}{0.009} (0.022 - 0.02) \right)$$

$$\sim 1 - F_{T(99)} (2.22) \sim 1 - 0.98572 \sim 0.015$$

ESERCIZIO 3 (vecchio programma)

$S = \{1, 2, 3\}$

$\lambda \in [0,1]$

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & 1-\lambda & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(i) $X_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$

$X_1 = (\lambda \quad 1-\lambda \quad 0)$

$X_2 = \left(\lambda^2 + \frac{1}{3}(1-\lambda) \qquad \lambda(1-\lambda) \qquad \frac{2}{3}(1-\lambda)\right)$

$P(X_2 = 2 \mid X_0 = 1) = \lambda(1-\lambda)$

$P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) = \frac{2}{3}(1-\lambda)$

$P(X_2 = 2 \mid X_0 = 1) > P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) \iff \lambda(1-\lambda) > \frac{2}{3}(1-\lambda)$

$\iff \lambda > \frac{2}{3}$

(ii) $P(X_3 = 2 \mid X_0 = 1)$

$X_3 = \left(* \qquad \lambda^2(1-\lambda) + \frac{1}{3}(1-\lambda)^2 + \frac{4}{9}(1-\lambda) \qquad * \right)$

$P(X_3 = 2 \mid X_0 = 1) = -\lambda^3 + \frac{4}{3}\lambda^2 - \frac{10}{9}\lambda + \frac{7}{9}$

(iii) Per quali λ la prob. inv. è $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$?

$$\left(\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3}\right) P = \left(\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3}\right) \iff \begin{cases} \frac{\lambda}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}(1-\lambda) + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\iff \frac{\lambda}{3} = \frac{2}{9} \iff \lambda = \frac{2}{3}$

Per quali λ la prob. inv. è $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$?

Per nessuno perché $(0 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2})P = (0 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2})$ non ha sol

$$\begin{cases} \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

oppure