Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Test del 21-07-2020

Esercizio 1 (2 punti). Data la funzione

$$f(x,y) = y^5 + 2x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 2y + 2$$

quale affermazione è vera?

- $(1,0)$ è un punto di minimo locale;
- $(1,0)$ è un punto di sella;
- $(1,0)$ è un punto di massimo locale;
- $(1,0)$ non è un punto critico;
- nessuna delle altre.

Esercizio 2 (3 punti). Dati

$$f(x,y) = (x-1)^2 + 4xy^2$$

$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \leq 2\,,\, -x \leq y \leq x\big\}$$

determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su Ω.

Esercizio 3 (3 punti). Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega y\,dx\,dy$$

$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0\,,\, x \geq y^4\,,\, x^2 + y^2 \leq 2\big\}$$

Esercizio 4 (1 punto). Dati il campo di vettori $\mathbf{F}$ e la curva (γ, I)

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^4 + y + \sin x \\ x + y^5 + e^{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) = \Big(\cos t\,,\, \sin t\Big)\,.$$

calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva (γ, I).

Esercizio 5 (1 punto). Data la curva (γ, I) e il punto P del suo sostegno Γ

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) = \big(t+2\,,\, 1+e^t\big)$$

$$P = (2\,,\, 2)$$

dire quale punto appartiene alla retta tangente a Γ in P:

- $(2, 1)$
- $(1, 2)$
- $(1, 1)$
- $(1, -1)$
- nessuno degli altri

Risposte

Esercizio 1. La funzione $f(x, y)$ è un polinomio con dominio $\mathbb{R}^2$, quindi è differenziabile almeno due volte in tutti i punti del dominio. Per studiare la natura del punto $P = (1, 0)$, iniziamo calcolando $\nabla f(P)$. Si ha

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x - 2y - 4 \\ 5y^4 + 2y - 2x + 2 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il punto P è quindi un punto critico per f. Possiamo ora usare la matrice hessiana di f per decidere se P è un punto di minimo locale, di massimo locale o di sella. Si ha

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 20y^3 + 2 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Si verifica che $\det(Hf(1, 0)) = 4 > 0$ e $\operatorname{tr}(Hf(1, 0)) = 6 > 0$, quindi P è un punto di minimo locale.

Esercizio 2. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

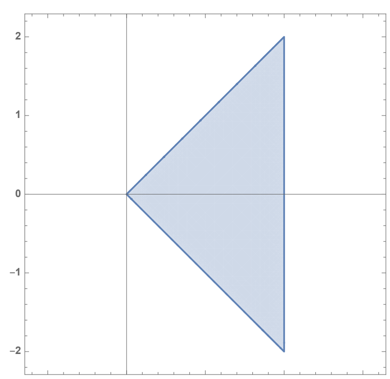

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

La funzione f è un polinomio con dominio naturale $X = \mathbb{R}^2$, e quindi è differenziabile su $\mathbb{R}^2$, e per calcolare le derivate parziali possiamo applicare le usuali regole di derivazione in ogni punto. Per cercare punti critici liberi interni a Ω cerchiamo dunque le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2(x-1) + 4y^2 = 0 \\ 8xy = 0 \end{cases}$$

che sono interne a Ω. Il sistema ammette come soluzioni i punti $C_1 = (1, 0)$, $C_2 = (0, \sqrt{\frac{1}{2}})$ e $C_3 = (0, -\sqrt{\frac{1}{2}})$. L'unico interno a Ω è C_1, che e quindi è il primo punto da considerare.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di Ω. Come spigoli indichiamo i punti

$$S_1 = (0\,,\,0)\ , \quad S_2 = (2\,,\,2) \quad \text{e} \quad S_3 = (2\,,\,-2)$$

e dividiamo il bordo in tre parti

$$\Gamma_1 = \{x = 2\,,\ -2 \le y \le 2\}$$

$$\Gamma_2 = \{y = x\,,\ 0 \le x \le 2\}$$

$$\Gamma_3 = \{y = -x\,,\ 0 \le x \le 2\}\ .$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (2\,,\,t)\,, \qquad t \in [-2, 2]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 1 + 8t^2\,.$$

Si trova $g_1'(t) = 16t$, che nell'intervallo in considerazione si annulla nel punto 0, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_1(0) = (2\,,\,0)$$

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (t\,,\,t)\,, \qquad t \in [0, 2]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = (t-1)^2 + 4t^3 = 4t^3 + t^2 - 2t + 1, \qquad t \in [0, 2]\ .$$

Si trova $g_2'(t) = 12t^2 + 2t - 2$, che nell'intervallo in considerazione si annulla nel punto $\frac{1}{3}$, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_2 = \gamma_2\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{3}\right).$$

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = (t\,,\,-t)\,, \qquad t \in [0,2]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_2(t)) = (t-1)^2 + 4t^3 = 4t^3 + t^2 - 2t + 1, \qquad t \in [0,2]\ .$$

Si trova $g_3'(t) = 12t^2 + 2t - 2$, che nell'intervallo in considerazione si annulla nel punto $\frac{1}{3}$, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_3 = \gamma_3\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\,,\,-\frac{1}{3}\right).$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C_1) = 0\,, \quad f(S_1) = 1\,, \quad f(S_2) = f(S_3) = 33\,,$$
$$f(Q_1) = 1\,, \quad f(Q_2) = f(Q_3) = \frac{16}{27}\,.$$

Quindi il massimo di f è 33 e il minimo è 0.

Esercizio 3. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

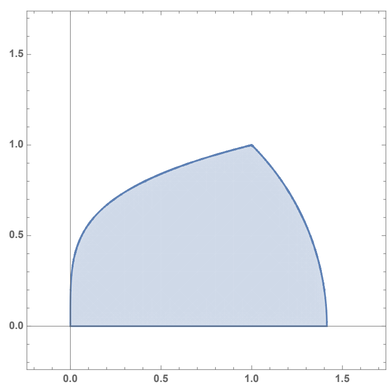

Figure 2: L'insieme Ω.

Il punto di intersezione tra le curve $x = y^4$ e $x^2 + y^2 = 2$ che ci interessa, è il punto $P = (1,1)$. Possiamo quindi scrivere Ω come unione di due insiemi semplici rispetto a y nella forma

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq x^{\frac{1}{4}}\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \leq x \leq \sqrt{2}\,,\, 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}\right\}\ ,$$

oppure come insieme semplice rispetto a x nella forma

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \leq y \leq 1\,,\, y^4 \leq x \leq \sqrt{2 - y^2}\right\}$$

L'integrale si può quindi calcolare usando entrambe le formule di riduzione. Nel primo caso troviamo

$$\iint_\Omega y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^{\frac{1}{4}}} y\,dy\right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\, dx + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} (2 - x^2)\, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2} \left(2x - \frac{1}{3} x^3\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{-3 + 4\sqrt{2}}{6}\,.$$

Mentre nel secondo caso possiamo scrivere

$$\iint_\Omega y\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{y^4}^{\sqrt{2-y^2}} y\, dx\right) dy = \int_0^1 \left(y\sqrt{2 - y^2} - y^5\right) dy =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\, (2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}\, y^6\right)\Big|_0^1 = \frac{-3 + 4\sqrt{2}}{6}\,.$$

Esercizio 4. Il campo di vettori $\mathbf{F}$ è definito su $X = \mathbb{R}^2$ e verifica

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 1 - 1 = 0\,.$$

Quindi, applicando il Lemma di Poincaré, concludiamo che $\mathbf{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$. La curva (γ, I) è chiusa, essendo $\gamma(2\pi) = \gamma(0) = (1, 0)$. Quindi il lavoro è nullo.

Esercizio 5. La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (-1, 1)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = (2, 2)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (-1, 1)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} t_0 + 2 = 2 \\ 1 + e^{t_0} = 2 \end{cases}$$

Si ottiene facilmente $t_0 = 0$, e quindi la retta tangente al sostegno nel punto P è generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva in P è allora

$$(x - 2) - (y - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0$$

e quindi il punto che appartiene alla retta è il punto $(1, 1)$.