Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 21-02-2024

Esercizio 1. (12 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 - \mu \\ \dot{y} = x^2 - 1 - y(x + \mu) \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare esistenza e stabilità dei punti fissi al variare di μ.

(b) Disegnare il ritratto di fase del sistema per

$$\mu \in \left\{ -1\,,\, 1\,,\, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 - \mu\, x \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) Disegnare il ritratto di fase al variare di μ.

(b) Indicando con $(x(t), y(t))$ le soluzioni del sistema, determinare

$$y^*(\mu) := \inf \left\{ y(0) > 0 \,:\, x(0) = 0,\ \lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty \right\}.$$

Esercizio 3. (10 punti) Fissato un valore $\alpha > 0$, si consideri la famiglia di trasformazioni continue

$$f_\lambda : [0,1] \to [0,1], \quad f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda\, x\, (1 + 2^\alpha\, x^\alpha), & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2\lambda\, (1 - x), & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

per valori del parametro $\lambda \in (0,1]$.

(a) Determinare i punti fissi di f_λ e discuterne la stabilità (può essere utile studiare il comportamente asintotico delle orbite).

(b) Dimostrare che questa famiglia fornisce un esempio di una trasformazione caotica con un punto fisso attrattivo.

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 - \mu \\ \dot{y} = x^2 - 1 - y(x+\mu) \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

(a) Per trovare i punti fissi del sistema osserviamo che dalla prima componente del campo troviamo subito che

$$\exists\ \bar{x} \text{ t.c. } \bar{x}^2 - 1 - \mu = 0 \iff \mu \geq -1.$$

Quindi:

- se $\boxed{\mu \in (-\infty, -1)}$ il sistema non ha punti fissi

Ponendo $\mu = -1$ dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 1 - y(x-1) = 0 \end{cases}$$

da cui:

- se $\boxed{\mu = -1}$ il sistema ha un solo punto fisso $P_0 = (0, 1)$

Poiché $JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2x - y & -(x+\mu) \end{pmatrix}$ si trova che per

$$\mu = -1 \Rightarrow JF(P_0) = JF(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ quindi P_0 non è iperbolico.

Tuttavia la retta $x = 0$ è invariante, infatti $I(x,y) = x$ soddisfa

$$\nabla I \neq \underline{0} \quad \text{e} \quad \dot{I}(x,y)\Big|_{I=0} = \dot{x}\Big|_{\{x=0\}} = x^2\Big|_{\{x=0\}} = 0.$$

Poiché $\dot{y}\Big|_{\{x=0\}} = -1 + y$, si ha $\dot{y} > 0 \iff y > 1$, e quindi P_0 è instabile.

Sia ora $\mu > -1$. Risolviamo

$$\begin{cases} x^2 - 1 - \mu = 0 \\ x^2 - 1 - y(x+\mu) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si trova $\bar{x} = \pm\sqrt{\mu+1}$.

Se $\bar{x} = \sqrt{\mu+1}$, nella seconda equazione si ha $\mu - y(\mu + \sqrt{\mu+1}) = 0$, che ha soluzione $\bar{y} = \dfrac{\mu}{\mu + \sqrt{\mu+1}}$ se $\mu + \sqrt{\mu+1} \neq 0 \iff \mu \neq \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Se $\bar{x} = -\sqrt{\mu+1}$, nella seconda equazione si ha $\mu - y(\mu - \sqrt{\mu+1}) = 0$, che ha soluzione $\bar{y} = \dfrac{\mu}{\mu - \sqrt{\mu+1}}$ se $\mu - \sqrt{\mu+1} \neq 0 \iff \mu \neq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Studiamo quindi la stabilità dei punti fissi trovati:

$$\boxed{P_0 = \left(\sqrt{\mu+1}, \frac{\mu}{\mu+\sqrt{\mu+1}}\right), \quad \text{per} \quad \mu \in (-1, +\infty) \setminus \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}}$$

Poiché $JF(P_0) = JF\left(\sqrt{\mu+1}, \dfrac{\mu}{\mu+\sqrt{\mu+1}}\right) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\mu+1} & 0 \\ 2\sqrt{\mu+1} - \dfrac{\mu}{\mu+\sqrt{\mu+1}} & -(\mu+\sqrt{\mu+1}) \end{pmatrix}$,

gli autovalori di $JF(P_0)$ sono $\lambda_1 = 2\sqrt{\mu+1}$, $\lambda_2 = -(\mu+\sqrt{\mu+1})$ e

$$\lambda_1 > 0 \quad \forall \mu > -1, \qquad \lambda_2 \begin{cases} > 0, & \text{se } \mu \in \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ < 0, & \text{se } \mu \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

quindi:

- se $\mu \in \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ allora P_0 è un nodo instabile, improprio se $\lambda_1 = \lambda_2 \iff \mu = \dfrac{9-\sqrt{117}}{2}$;
- se $\mu \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, allora P_0 è un punto di sella instabile.

$$\boxed{P_1 = \left(-\sqrt{\mu+1}, \frac{\mu}{\mu-\sqrt{\mu+1}}\right), \quad \text{per} \quad \mu \in (-1, +\infty) \setminus \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$$

Poiché $JF(P_1) = JF\left(-\sqrt{\mu+1}, \dfrac{\mu}{\mu-\sqrt{\mu+1}}\right) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\mu+1} & 0 \\ -2\sqrt{\mu+1} - \dfrac{\mu}{\mu-\sqrt{\mu+1}} & -(\mu-\sqrt{\mu+1}) \end{pmatrix}$,

gli autovalori di $JF(P_1)$ sono $\lambda_2 = -2\sqrt{\mu+1}$, $\lambda_2 = -(\mu-\sqrt{\mu+1})$ e

$$\lambda_1 < 0 \quad \forall \mu > -1, \qquad \lambda_2 \begin{cases} > 0, & \text{se } \mu \in \left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ < 0, & \text{se } \mu \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

quindi:

- se $\mu \in \left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ allora P_1 è un punto di sella instabile;

- se $\mu \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, allora P_1 è un nodo asintoticamente stabile, improprio se $\lambda_1 = \lambda_2 \iff \mu = \frac{9+\sqrt{117}}{2}$.

$\boxed{\text{(b)}}$

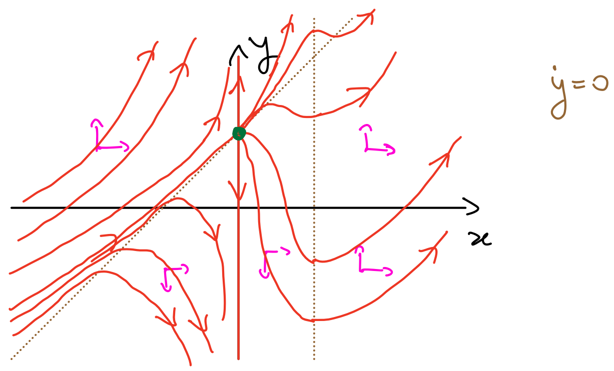
Per disegnare i ritratti di fase, osserviamo innanzitutto che il sistema ha due rette invarianti $\forall \mu > -1$. Infatti se $I(x,y) = x$ si ha

$$\nabla I \neq 0 \quad e \quad \dot{I}\Big|_{I=\pm\sqrt{\mu+1}} = \dot{x}\Big|_{\{x=\pm\sqrt{\mu+1}\}} = x^2-1-\mu\Big|_{\{x=\pm\sqrt{\mu+1}\}} = 0.$$

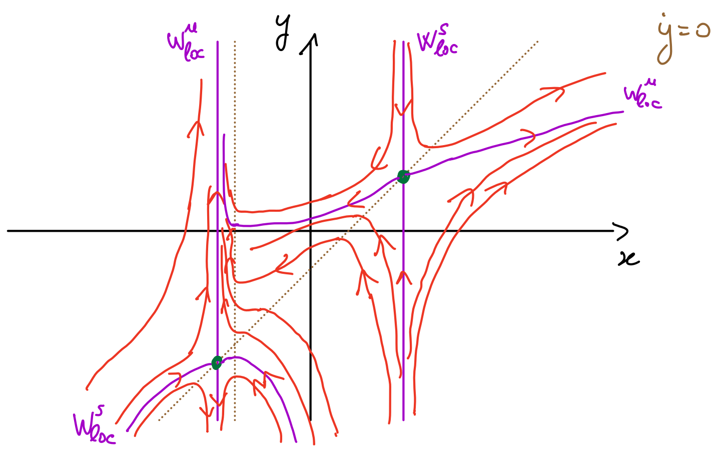
Quindi sono invarianti le due rette $\{x=\sqrt{\mu+1}\}$ e $\{x=-\sqrt{\mu+1}\}$ $\forall \mu > -1$.
Se $\mu = -1$, le due rette coincidono nell'unica retta invariante $\{x=0\}$.

Poiché le rette invarianti trovate passano per i punti fissi del sistema, per la teoria dell'indice di Poincaré e l'unicità locale delle soluzioni del sistema, non ci possono essere orbite periodiche.

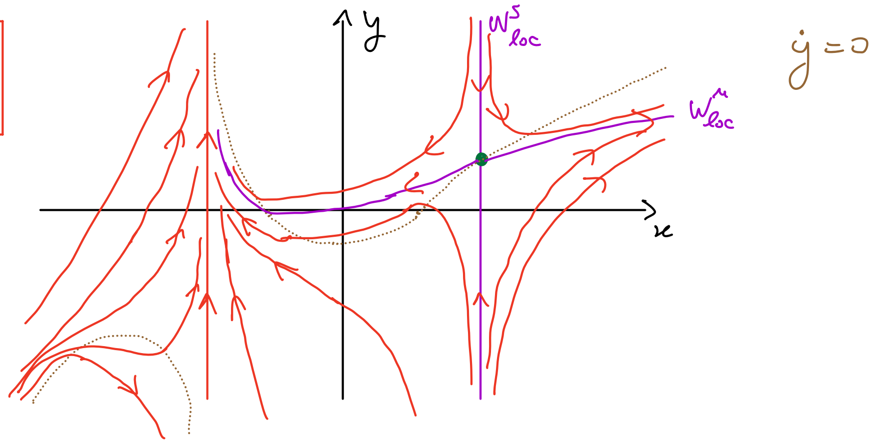
$\boxed{\mu = -1}$



$\boxed{\mu = 1}$



$$\boxed{\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$



ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 - \mu x \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

(a) Il sistema è hamiltoniano di tipo meccanico con $V(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\mu x^2$ e

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\mu x^2$$

I punti fissi del sistema sono

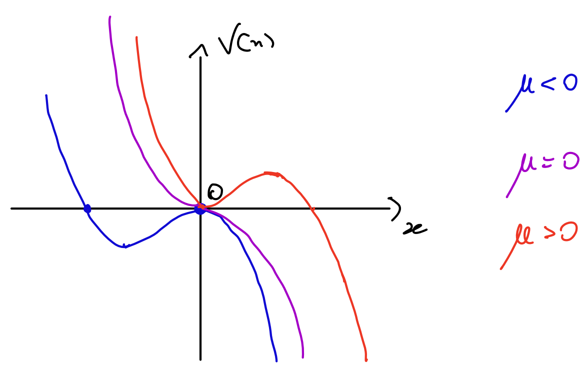
$P_0 = (0,0)$, $P_1 = (\mu, 0)$ se $\mu \neq 0$

$P_0 = (0,0)$ se $\mu = 0$

Inoltre $V''(x) = -2x + \mu$, quindi $V''(0) = \mu$ e $V''(\mu) = -\mu$.

Quindi:

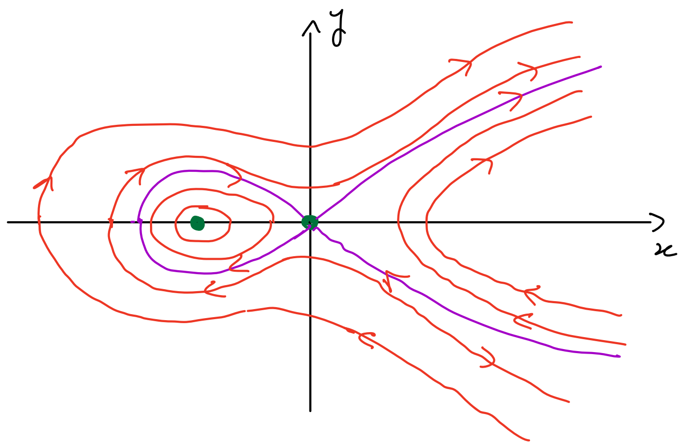
- se $\mu < 0$, P_0 è un punto di sella, P_1 è un centro
- se $\mu = 0$, P_0 è degenere
- se $\mu > 0$, P_0 è un centro, P_1 è un punto di sella



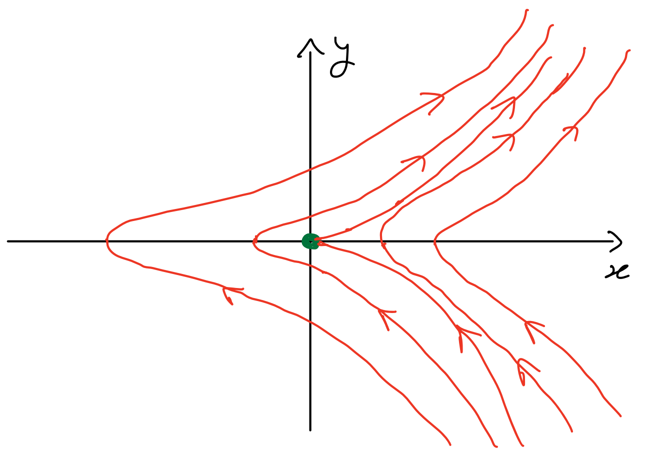
Poniamo $\mu<0$. Si ha $H(0,0)=0$, quindi $H(x,y)=0$ è l'insieme di livello di cui una parte descrive l'orbita omoclina di P_0.

$$\{H(x,y)=0\} = \{ \; y^2 = \tfrac{2}{3}x^3 - \mu x^2 \}$$

e $\{H(x,y)=0\} \cap \{y=0\} = \{(0,0), (\tfrac{3}{2}\mu, 0)\}$.



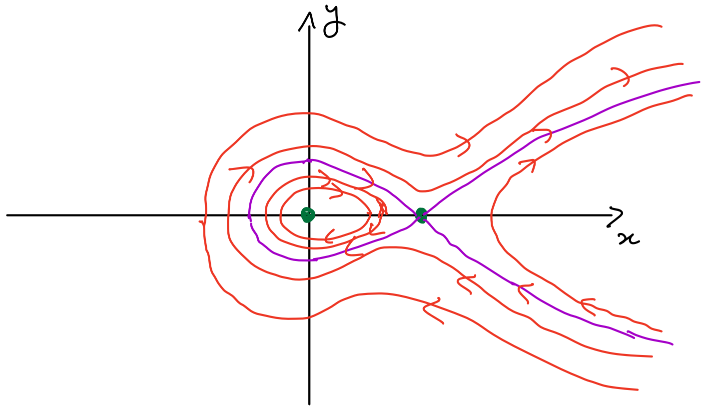
Poniamo $\mu=0$. In questo caso $\{H(x,y)=H(0,0)\} = \{ y^2 = \tfrac{2}{3}x^3 \}$.



Poniamo $\mu>0$. In questo caso $P_1=(\mu,0)$ è il punto di sella e $H(P_1)=\tfrac{1}{6}\mu^3$. Dunque l'orbita omoclina di P_1 è contenuta nell'insieme di livello

$$\{H(x,y)=\tfrac{1}{6}\mu^3\} = \{ \; y^2 = \tfrac{2}{3}x^3 - \mu x^2 + \tfrac{1}{3}\mu^3 \}$$

e $\{H(x,y)=\tfrac{1}{6}\mu^3\} \cap \{y=0\} = \{(\mu,0), (-\tfrac{1}{2}\mu, 0)\}$.



(b) Utilizzando i ritratti di fase (oppure le proprietà di $H(x,y)$ e di $V(x)$), deduciamo che

se $\mu \leq 0$ $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ $\forall\, y(0)>0$, mentre $x(t)=0$ se $y(0)=0$

Invece se $\mu>0$, le orbite con $y(0)$ piccolo restano limitate. Affinché $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ serve $y(0) > \bar{y} > 0$ con $H(0,\bar{y}) = H(P_1)$.

$$H(0,\bar{y}) = H(P_1) \iff \frac{1}{2}\bar{y}^2 = \frac{1}{6}\mu^3 \iff \bar{y} = \sqrt{\frac{1}{3}\mu^3}$$

Quindi

$$\boxed{y^*(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu \leq 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}\mu^3}, & \mu > 0 \end{cases}}$$

ESERCIZIO 3

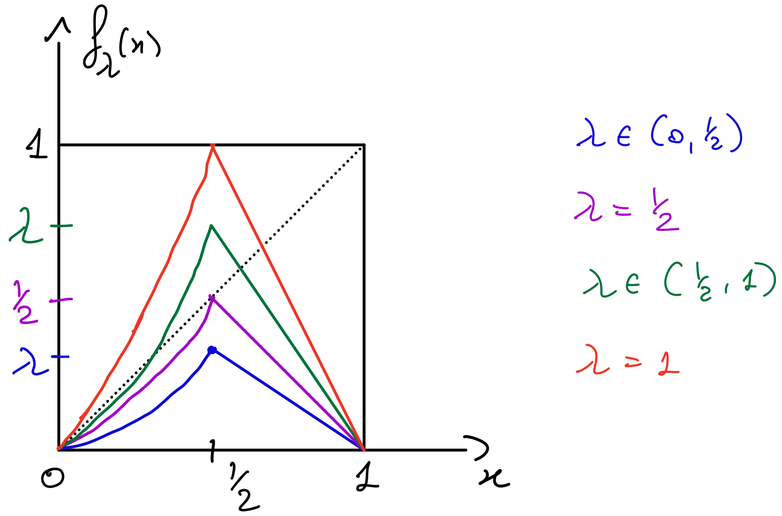
$$f_\lambda : [0,1] \to [0,1], \qquad f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x\,(1+2^\alpha x^\alpha), & x\in[0,\frac{1}{2}] \\ 2\lambda\,(1-x), & x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

con $\alpha>0$ fissato e $\lambda \in (0,1]$ variabile.

(a) Osserviamo che $f_\lambda(0)=0$, $f_\lambda(\frac{1}{2})=\lambda$, $f_\lambda(1)=0$ e $f_\lambda(x)$ è continua.

Inoltre $f_\lambda'(x) = \lambda + (\alpha+1)2^\alpha \lambda x^\alpha > 0$ per $x\in(0,\frac{1}{2})$ e $(f_\lambda')_+(0) = \lambda$.

Infine $f_\lambda''(x) = \alpha(\alpha+1)2^\alpha\lambda x^{\alpha-1} > 0$ per $x \in (0,\frac{1}{2})$. Quindi otteniamo i seguenti grafici:



Per $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_\lambda(x)$ ha un punto fisso in $x_0 = 0$ $\forall \lambda \in (0,1]$ e

- se $\lambda \in (0,1)$, $(f_\lambda')_+(0) = \lambda$ implica che x_0 è attrattivo
- se $\lambda = 1$, x_0 non è iperbolico ma $f_\lambda''(x) > 0$ $\forall x > 0$ implica che x_0 è repulsivo.

Per $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_\lambda(x)$ ha un altro punto fisso se $\lambda(1 + 2^\alpha x^\alpha) = 1$ ha una soluzione in $(0, \frac{1}{2}]$. Poiché

$$\lambda(1 + 2^\alpha x^\alpha) = 1 \iff x^\alpha = 2^{-\alpha}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \iff x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)^{1/\alpha}$$

si ha

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)^{1/\alpha} \in (0, \tfrac{1}{2}] \iff \lambda \in [\tfrac{1}{2}, 1)$$

Per studiare la stabilità di x_1 con $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$, osserviamo che

$$f_\lambda([x_0, x_1]) = [x_0, x_1] \quad \text{e} \quad f_\lambda^n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \quad \forall x \in (x_0, x_1)$$

(la seconda proprietà si ottiene usando che $f_\lambda(x) < x$ $\forall x \in (x_0, x_1)$), quindi necessariamente x_1 è repulsivo da sinistra.

Se $\lambda = \frac{1}{2}$, $f_\lambda([x_1, x_1 + \delta]) = [x_1 - \delta, x_1]$ $\forall \delta > 0$, e se $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ $f_\lambda(x) > x$ su un intorno $(x_1, x_1 + \varepsilon)$ sufficientemente piccolo. Quindi x_1 è repulsivo anche da destra. In definitiva, x_1 è repulsivo $\forall \lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$.

(Osserviamo che lo stesso risultato si può ottenere calcolando $|f_\lambda'(x_1)|$).

Per $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $f_\lambda(x)$ ha un punto fisso se $2\lambda(1 - x) = x$ ha una soluzione in $[\frac{1}{2}, 1]$. Poiché

$$2\lambda(1 - x) = x \iff x = \frac{2\lambda}{1 + 2\lambda}$$

si ha
$$x_2 = \frac{2\lambda}{1+2\lambda} \in [\tfrac{1}{2}, 1] \iff \lambda \in [\tfrac{1}{2}, 1]$$

Se $\lambda = \frac{1}{2}$, $x_2 = x_1$. Se $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$ si ha $f_\lambda'(x_2) = -2\lambda$, quindi $|f_\lambda'(x_2)| > 1$ e x_2 è repulsivo $\forall \lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$.

$\boxed{(b)}$

Abbiamo ottenuto che f_λ ha un punto fisso attrattivo in $x_0 = 0$ $\forall \lambda \in (0,1)$. Dobbiamo quindi mostrare che $\exists \lambda \in (0,1)$ per cui f_λ è caotica. Costruiamo un ferro di cavallo per f_λ^2. Poniamo intanto $\lambda > \frac{1}{2}$. Dato $x_2 = \frac{2\lambda}{1+2\lambda}$, $\exists z \in (0, \frac{1}{2})$ t.c. $f_\lambda(z) = x_2$. Quindi se $J = [z, x_2]$ si ha $\frac{1}{2} \in \mathring{J}$, e $f_\lambda^2(x_2) = f_\lambda^2(z) = x_2$. Inoltre $f_\lambda^2(\frac{1}{2}) = f_\lambda(\lambda) = 2\lambda(1-\lambda)$ poiché $\lambda > \frac{1}{2}$. Quindi se $2\lambda(1-\lambda) < z$ troviamo che f_λ^2 ha un ferro di cavallo in J. Sia $g(x) = \lambda x(1 + 2^\alpha x^\alpha)$, allora $z = g^{-1}(\frac{2\lambda}{1+2\lambda})$ e studiamo
$$G(\lambda) = g^{-1}\left(\frac{2\lambda}{1+2\lambda}\right) - 2\lambda(1-\lambda)$$
Si ha $G(1) = g^{-1}(2/3) > 0$ e $G'(1) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(2/3))} + 2 > 0$,

quindi $\exists \bar{\lambda} \in (\frac{1}{2}, 1)$ t.c. $G(\bar{\lambda}) > 0$, e per ogni $\lambda \in (\bar{\lambda}, 1)$ la mappa f_λ è caotica con un punto fisso attrattivo.