$\mathbb{N}$ numeri naturali $\quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \subset \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$(\mathbb{N}_0, +)$, 0 el. neutro

prop. associativa $\quad a + (b+c) = (a+b)+c$

$\mathbb{Z}$ numeri interi $\quad \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$(\mathbb{Z}, +)$,
- 0 el. neutro
- prop. associativa
- elemento inverso di a, indicato con $-a$.

} gruppo

[$\underset{\text{per ogni}}{\forall} a \in \mathbb{Z}$ $\underset{\text{esiste}}{\exists} b \in \mathbb{Z}$, el. inverso di a, t.c.

$a + b = \underset{\text{el. neutro}}{0}$]

- prop. commutativa } gruppo commutativo

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$,
- 1 el neutro ($\exists a \in \mathbb{Z}$ t.c. $\forall b \in \mathbb{Z}$ vale $a \cdot b = b$?)
- prop. associativa $\quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- el. inverso? ($\forall a \in \mathbb{Z}$ $\exists b \in \mathbb{Z}$ t.c. $a \cdot b = 1$?)

NO

$\mathbb{Q}$ numeri razionali $\quad = \left\{ \frac{p}{q} \underset{\text{t.c.}}{:} p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$

$(\mathbb{Q}, +)$ gruppo commutativo

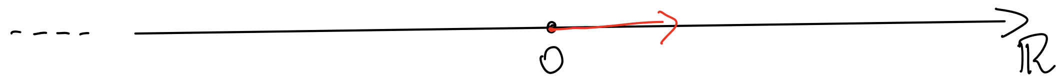
$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$,
- 1 el. neutro del $\cdot$
- prop. associativa del $\cdot$
- $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{p}{q} \neq 0$ $\exists \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ t.c. $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$.
- prop. commutativa del $\cdot$
- prop. distributiva $\quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

} Campo

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \;\vdots\; \subsetneq \mathbb{R} \qquad (\subsetneq \mathbb{C})$$

$\mathbb{R}$ numeri reali [$\sqrt{2}$ è una soluzione di $x^2-2=0$]

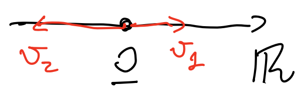
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ numeri irrazionali.



$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ campo

Algebra lineare

Definizione Si chiama SPAZIO VETTORIALE un insieme V di vettori con un'operazione binaria $+$, tale che $(V,+)$ sia un gruppo commutativo con elemento neutro $\underline{0}$, il vettore nullo,

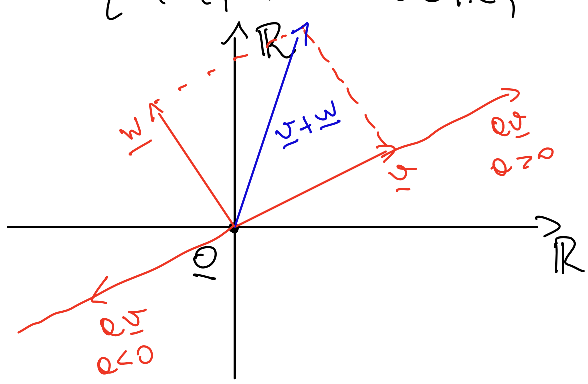
[

$v_1 + v_2 \in \mathbb{R}$]

e con un prodotto per scalare $\mathbb{R}$, ossia $\forall\, \underline{v} \in V$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ posso considerare $a\underline{v} \in V$, tale che: (i) $a(\underline{v}+\underline{w}) = a\underline{v} + a\underline{w}$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$; (ii) $(a+b)\underline{v} = a\underline{v} + b\underline{v}$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ $\forall\, \underline{v} \in V$; (iii) $a(b\underline{v}) = (ab)\underline{v}$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ $\forall\, \underline{v} \in V$.

Esempio $\mathbb{R}^2$ piano euclideo

$$\mathbb{R}^2 = \{ (a,b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{prodotto cartesiano}$$



$\underline{0} = (0,0)$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{w} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ $\qquad (\mathbb{R}^2, +)$

$$\underline{v} + \underline{w} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

$a \in \mathbb{R}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow a\underline{v} = a \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a v_1 \\ a v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ prodotto per scalare