

Variabili aleatorie

$$X: \underset{\text{universo}}{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

• Discrete

Imm X è un insieme finito o numerabile

$$\text{Imm } X = \{x_i\}$$

$$\text{legge di } X \Leftrightarrow \{p(x_i)\} \quad p(x_i) \geq 0, \sum p(x_i) = 1$$

$$\text{Media di } X = E[X] = \sum x_i p(x_i)$$

$$\begin{aligned} \text{Varianza di } X = \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \sum x_i^2 p(x_i) - \left(\sum x_i p(x_i)\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Deviazione Standard (o Scarto quadratico medio) di } X \\ = \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}. \end{aligned}$$

ES Lanciamo due volte un dado e definiamo la v.a. X che restituisce la somma di +1 per ogni esito nell'insieme $\{1, 2\} = A$ e -1 per ogni esito nell'insieme $\{3, 4, 5, 6\} = B$

$$\begin{aligned} \Omega &= \{ \{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{6, 1\}, \dots, \{6, 6\} \} \\ &= \{ AA, AB, BA, BB \} \end{aligned}$$

$$\text{Imm } X = \{+2, 0, -2\}$$

$$P(+2) = P(A)P(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} P(0) &= P(AB) + P(BA) = P(A)P(B) + P(B)P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$P(-2) = P(BB) = P(B)P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$E[X] = \sum x_i p(x_i) = +2 \cdot p(+2) + 0 \cdot p(0) + (-2) \cdot p(-2) = 2 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{4}{9} + (-2) \cdot \frac{4}{9}$$

$$= -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 = \sum x_i^2 p(x_i) - (E[X])^2 = \\ &= (+2)^2 \cdot p(+2) + 0^2 \cdot p(0) + (-2)^2 p(-2) - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

ES legge geometrica.

Lanciamo un dado e indichiamo con "successo" l'uscita del 6.

X conta quante volte devo lanciare il dado per ottenere un successo.

$$\text{Imm } X = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}.$$

$$p(n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \quad \forall n \geq 1.$$

ES lancio un dado fino al "successo" ma al massimo 3 volte.

X conta quanti lanci faccio. $\text{Imm } X = \{1, 2, 3\}$

$$p(1) = \frac{1}{6}, \quad p(2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, \quad p(3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{36}\right) = \frac{25}{36}$$

$$E[X] = 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) = \frac{1}{6} + \frac{10}{36} + \frac{75}{36} = \frac{91}{36} \sim 2,528$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= 1^2 p(1) + 2^2 p(2) + 3^2 p(3) - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{20}{36} + \frac{225}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = \frac{251}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 \sim 6,972 - 6,39 \sim 0,582 \end{aligned}$$

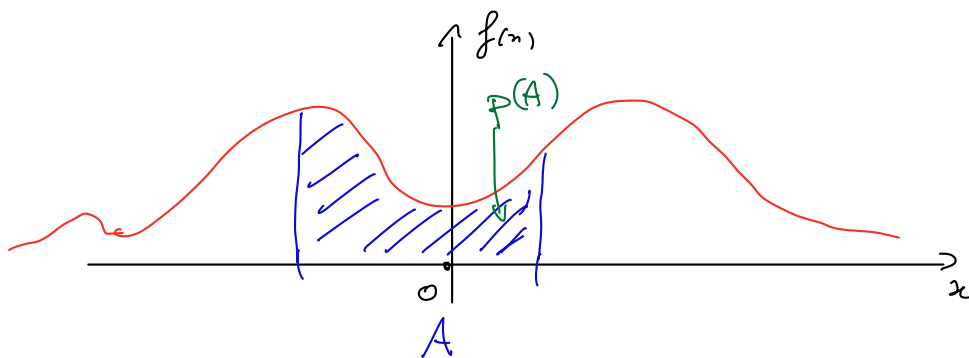
$$\sigma(X) \sim 0,763$$

• Con densità. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{Imm } X = \mathbb{R}$ pp. $[a, b]$

Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, la densità di X , tale che

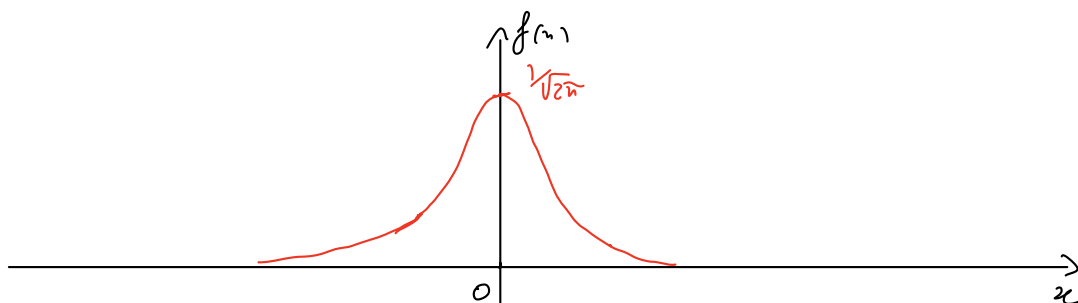
$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \quad p(A) = \int_A f(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$$

intervallo probabilità che X assuma un valore in A



ES Legge normale standard, $N(0, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



$$P(-1, 1) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Per una v.e. X con densità $f(x)$,

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx, \quad \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx - (E[X])^2$$

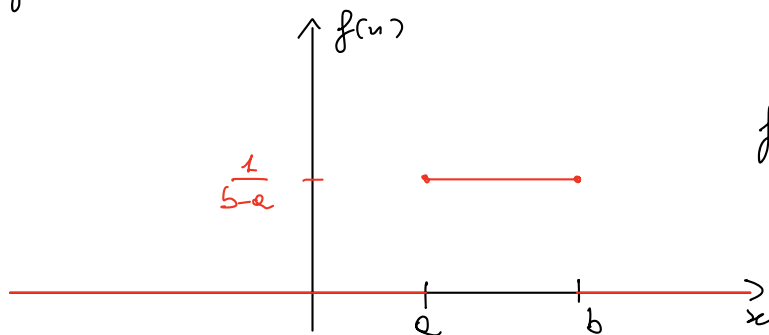
$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

ES $N(0, 1)$ ha media 0 e varianza 1.

$N(\mu, \sigma^2)$ " " μ e " σ^2 .

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ES legge uniforme su $[a, b]$



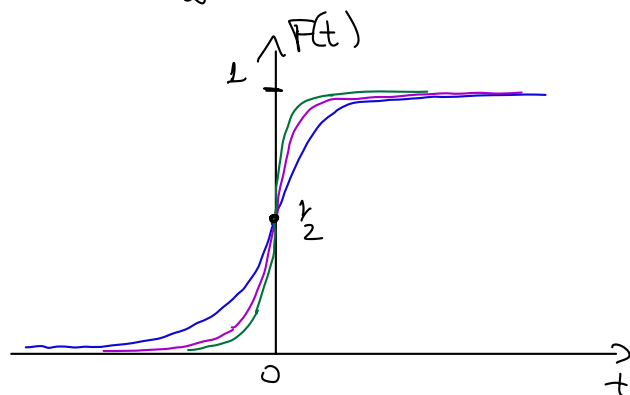
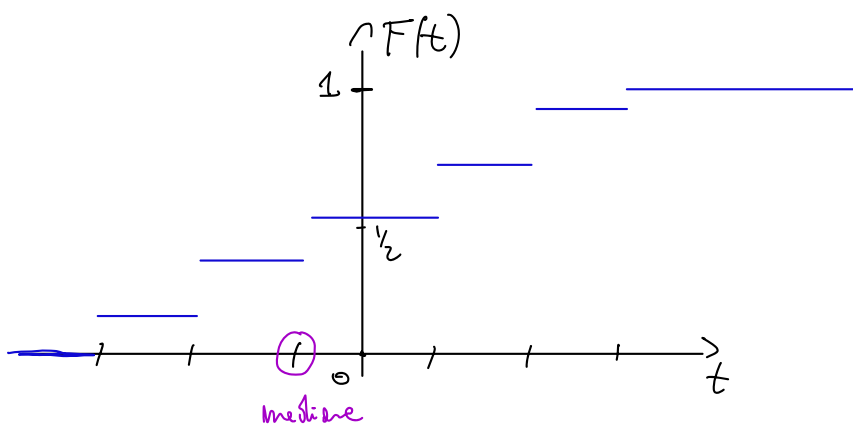
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

↔

Funzione di ripartizione di una variabile aleatoria $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$F(t) := \mathbb{P}\{X \leq t\} = \begin{cases} \sum_{x_i \leq t} p(x_i) \\ \int_{-\infty}^t f(x) dx \end{cases}$$



$$\mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Il k -esimo percentile è t_k per

$$\text{cioè } F(t_k) = \frac{k}{100} = \mathbb{P}\{X \leq t_k\}$$