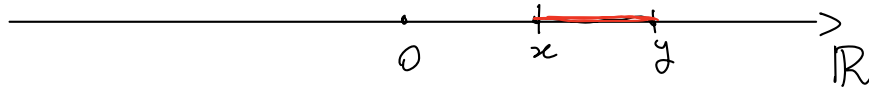


Insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$



Distanza euclidea, $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x\}$
 $d(x, y) = |x - y|$

Intervallo su $\mathbb{R}$,

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, si chiama intervallo I_{ab} e $a < b$ ($a < b$)



chiuso $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ($a, b \in [a, b]$).
oss $3 \leq 3?$ $a \leq a \leq b$
 $[a, a] = \{a\}$

aperto $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ($a, b \notin (a, b)$)
oss $(a, a) = \emptyset$

mezz'intervallo $[a, b)$, $(a, b]$

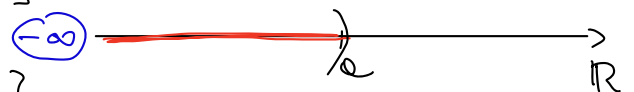
Consideriamo $a \in \mathbb{R}$,

$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$



$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

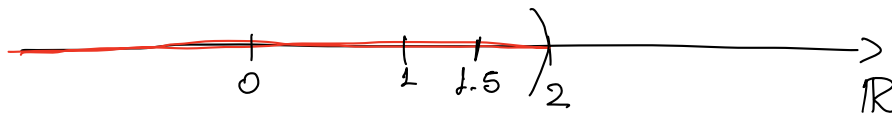
Def Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente se $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che $k \geq a \quad \forall a \in A$.

Es $(-\infty, 2)$, $(1, 3]$ sono limitati superiormente
 $[0, +\infty)$ non è limitato superiormente.

Domanda $\exists k \in (-\infty, 2)$ tale che $k \geq a \quad \forall a \in (-\infty, 2)$? no
 $(-\infty, 2) = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$

Esempi su $k \in \mathbb{R}$ tali che $k \geq a \quad \forall a \in (-\infty, 2)$

$\{ 2$	$, 3$	$, \dots$	$, \cancel{4}$
$2 \geq a$	$3 \geq a$		$4 \geq a$
$\forall a \in (-\infty, 2)?$	$\forall a \in (-\infty, 2)? \checkmark$		$\forall a \in (-\infty, 2)?$
$2 \geq a$			$a = 1.5, \frac{3}{2}$
$\forall a \text{ t.c. } a < 2? \checkmark$			$4 \geq 1.5$ <u>no</u>
			$1.5 < 2 \checkmark$



Domanda $\exists k \in (1, 3]$ tale che $k \geq a \quad \forall a \in (1, 3]$?



$k=3$

Def Si dice che un insieme A ha massimo se è limitato superiormente ed esiste $k \in A$ tale che $k \geq a \quad \forall a \in A$.
 Questo elemento è il $\max A$.

Es $\max (1, 3] = 3$.

$\max (-\infty, 2)$ non esiste.

Def Se A è limitato superiormente ma non ammette massimo, si chiama estremo superiore di A il più piccolo $k \in \mathbb{R}$ tale

che $k \geq a \quad \forall a \in A$. Si indica con $\sup A$.

$$\underline{\text{ES}} \quad \sup (-\infty, 2) = 2$$



Def Se A non è limitato superiormente ($\forall k \in \mathbb{R} \exists a \in A$ tale che $a > k$), si pone $\sup A = +\infty$.

Vediamo "Esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $k \geq a \quad \forall a \in A$ " =
= "Per ogni $k \in \mathbb{R}$ esiste $a \in A$ tale che $a > k$ ".

Def $A \subset \mathbb{R}$ si dice limitato inferiormente se $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che $k \leq a \quad \forall a \in A$.

Se A è limitato inferiormente, A ammette minimo se $\exists k \in A$ tale che $k \leq a \quad \forall a \in A$. Si indica con $\min A$.

Se A è limitato inferiormente e non ammette minimo, si chiama estremo inferiore di A il più grande dei $k \in \mathbb{R}$ tale che $k \leq a \quad \forall a \in A$. Si indica con $\inf A$.

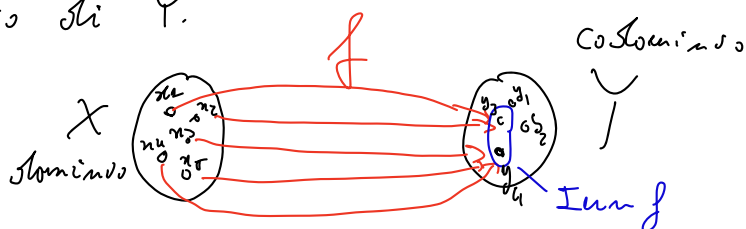
Se A non è limitato inferiormente, si pone $\inf A = -\infty$.

A	limitato sup	$\max A$	$\sup A$	limitato inf	$\min A$	$\inf A$
$(-2, 2]$	sì	2	/	sì	/	-2
$[-3, 1)$	sì	/	1	sì	-3	/
$[0, +\infty)$	no	/	$+\infty$	sì	0	/
$(-\infty, -1)$	sì	/	-1	no	/	$-\infty$
$\mathbb{N}$	no	/	$+\infty$	sì	1	/

Def Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice limitato se è limitato superiormente e inferiormente.

FUNZIONI

Def Dato due insiemi X, Y , una funzione $f: X \rightarrow Y$ è una legge che associa ad ogni elemento di X uno ed un solo elemento di Y .



L'insieme X si chiama DOMINIO di f . L'insieme Y si chiama CODOMINIO di f . Si chiama IMMAGINE di f l'insieme

$$\text{Imm } f := \{ y \in Y : \exists x \in X, f(x) = y \}$$

Si chiama GRAFICO di f il sottoinsieme di $X \times Y$ dato da

$$\text{graf } f := \{ (x, y) \in X \times Y : y = f(x) \}$$

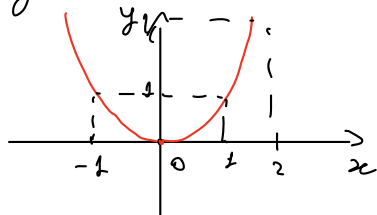
ES $\text{Imm } f = \{ y_3, y_4 \}$ $\text{graf } f = \{ (x_1, y_3), (x_2, y_3), (x_3, y_4), (x_4, y_4), (x_5, y_4) \}$

Def Si chiama funzione reale di variabile reale, una funzione $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dove D è il dominio naturale.

dominio codominio

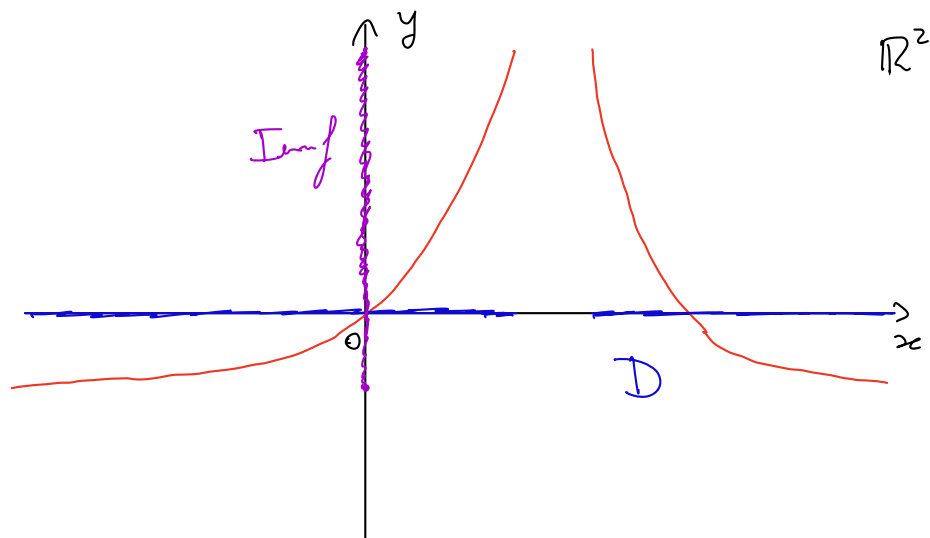
ES $x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2, D = \mathbb{R}, \text{Imm } f = [0, +\infty)$

$$\text{Imm } f = \{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = y \}$$



x	x^2
0	0
1	1
-1	1
2	4

ES



ES

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad D = [0, +\infty), \quad \text{Im } f = [0, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad \text{''}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad D = \mathbb{R}$$

Att

$\sqrt{x}$ è il numero reale ≥ 0 che elevato al quadrato fa x .

$$\sqrt{4} = 2$$

$$-\sqrt{4} = -2$$

(le soluz. di $x^2 = 4$ sono $\pm \sqrt{4} = \pm 2$)

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = |x| := \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{(-5)^2} = 5$$