

ES

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per quali $k \in \mathbb{R}$ esistono soluzioni di $A\underline{x} = \underline{b}$?

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che per $k=1$, $\text{rank } A = 2$, $\text{rank } C = 3$.

Trovare le soluzioni per $k \neq 1$.

←

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{Dati } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Trovo al massimo due vettori
linearmente indipendenti, e due
li trovo.

$$\cdot \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ sono lin. indipendenti} \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{solo se } \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \text{non esiste } \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\Rightarrow \text{rank } A \geq 2 \right)$$

$$\cdot \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ tali che}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 \\ 2 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 \\ 2 \cdot \lambda_1 + (-1) \cdot \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Dalla prima coordinata si ottiene $1 = \lambda_1$

Sostituisco nella seconda $0 = 2 + \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_2 = -2$

Sostituisco nella terza $4 = 2 + (-1) \cdot (-2) \quad \checkmark$

($\Rightarrow \text{rank } A \leq 2$)

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$M(3 \times 4)$

Sappiamo che $\text{rank } C \leq 3$, $\text{rank } C \leq 4$.
 $\text{rank } C \geq 2$

Trovo 3 colonne linearmente indipendenti?

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono lin. indipendenti?

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tutti nulli?

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\cancel{\lambda_1} + \lambda_2 \\ 2\cancel{\lambda_1} - \cancel{\lambda_2} + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ sono lin. indipendenti.

$\Rightarrow \text{rank } C = 3$.

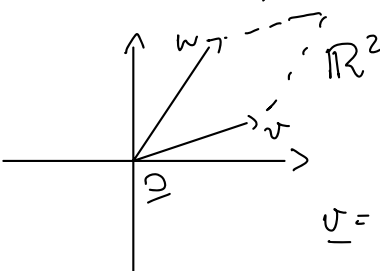
DETERMINANTE DI MATRICI QUADRATE
 $M(n \times n, \mathbb{R})$, $n \geq 1$.

• $n=1$. $A = (a_{11})$, $\det(A) := a_{11}$.

• $n=2$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det(A) := ad - bc$

ES $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5$

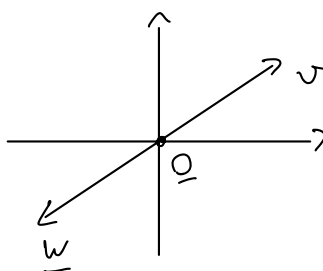
OSS



$$A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$|\det A| =$ area del parallelogramma generato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$



$$\underline{w} = -\underline{v}$$

$\det A = 0 \Leftrightarrow \underline{v}, \underline{w}$ sono lin. dipendenti.

ES $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - k \cdot k = 4 - k^2$$

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2.$$

Se $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$ ($k \neq \pm 2$) allora $\det(A) \neq 0$,

ovvero $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 4 \end{pmatrix}$ sono lin. indipendenti,

ovvero $\text{rank}(A) = 2$.

• $n=3$

Sviluppo di Laplace

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix}$$

Def: $i, j \in \{1, 2, 3\}$ chiamo minore C_{ij} la matrice 2×2

che si ottiene cancellando da A la riga i -esima e la colonna j -esima.

$$C_{11} = \begin{pmatrix} e & f \\ h & l \end{pmatrix}$$

$$C_{23} = \begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$C_{32} = \begin{pmatrix} e & c \\ d & f \end{pmatrix}$$

Formula

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Scelgo la
riga A_i

$$\det A = \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{ij} \det(C_{ij})$$

Scelgo la
colonna A_j

$$\det A = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+j} a_{ij} \det(C_{ij})$$

$$A = \begin{pmatrix} \oplus 2 & \ominus 1 & \oplus 3 \\ \ominus 2 & \oplus 4 & \ominus 1 \\ \oplus 1 & \ominus 2 & \oplus 2 \end{pmatrix} \leftarrow$$

Scelgo la seconda riga.

$$\det A = \underline{(-1)} \underline{(-1)} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \underline{(+1)} \cdot \underline{4} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \underline{(-1)} \cdot \underline{1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \\
 & = (+1) \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot (-2)) + 4 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + \\
 & \quad + (-1) \cdot (2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1) = \\
 & = 8 + 4 + 5 = 17.
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{+} 2 & \textcircled{-} 1 & \textcircled{+} 3 \\ \textcircled{-} 1 & \textcircled{+} 4 & \textcircled{-} 1 \\ \textcircled{+} 1 & \textcircled{-} 2 & \textcircled{+} 2 \end{pmatrix} \quad \text{Sceglie la prima colonna.}$$

$$\begin{aligned}
 \det A &= \underline{(+1)} \cdot \underline{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \underline{(-1)} \cdot \underline{(-1)} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\
 & \quad + (+1) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \\
 & = 2 \cdot (4 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)) + 1 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot (-2)) + \\
 & \quad + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 4) = \\
 & = 20 + 8 - 11 = 17.
 \end{aligned}$$

METODO DI SARRUS

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 \det A &= a \cdot e \cdot l + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h + \\
 & \quad (-1)(c \cdot e \cdot g) + (-1)(a \cdot f \cdot h) + (-1)(b \cdot d \cdot l)
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{matrix}$$

$$\det A = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 1) + (-1) \cdot (2 \cdot 1 \cdot (-2)) + (-1) \cdot (1 \cdot (-1) \cdot 2) \\ = 16 + 1 + 6 - 12 + 4 + 2 = 17$$

Dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, sono tutti e tre lin. indipendenti se e solo se $\det A \neq 0$ con $A = (\underline{v}_1 \ \underline{v}_2 \ \underline{v}_3)$

$$A \in M(3 \times 3), \text{ rango } A = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

ES

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 4 + 0 - 2k - 2k - 0 - 0 = 4 - 4k$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & k & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \end{matrix}$$

$$\det A = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Se $k \neq 1$, $\text{rango } A = 3$.

Se $k = 1$, $\text{rango } A = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \xrightarrow{\text{NO}}$

Prop $A \in M(m \times n)$, il rango di A è uguale alla dimensione massima di una sua sottomatrice quadrata con determinante diverso da 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 0 \Rightarrow \text{rango } A \leq 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$$

$$\det B = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{rango } A \geq 2$$

$$\Rightarrow \text{rango } A = 2.$$

Def Un sottoinsieme W di $\mathbb{R}^n$ si chiama sottospazio affine

se $\exists \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio vettoriale tali che

$$W = \underline{w} + U$$

Si dice che $\dim W = \dim U$.

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Dato un sistema lineare di m equazioni in n variabili, sia $A \in M(m \times n)$ la matrice dei coefficienti, sia $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ il vettore dei termini noti.

Costruiamo $C = (A \mid \underline{b})$ la matrice completa.

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha almeno una soluzione $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ se e solo se

$$\text{rango } A = \text{rango } C.$$

Se il sistema ha soluzioni, l'insieme W delle soluzioni è un sottospazio affine, $W = \underline{w} + U$, dove $\underline{w} \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione particolare ($A\underline{w} = \underline{b}$), e U è il sottospazio vettoriale delle soluzioni di $A\underline{x} = \underline{0}$. Inoltre

$$\dim W = n - \operatorname{rank}(A).$$

Esercizio 1

$$\begin{cases} x + ky = 4 - k \\ kx + 4y = 4 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 2), \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 - k \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{rank} A = ? \quad , \quad \det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 2.$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - k \cdot k = 4 - k^2$$

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow k = \pm 2.$$

$$k \neq \pm 2 \Rightarrow \operatorname{rank} A = 2$$

$$k = 2 \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \operatorname{rank} A = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \checkmark \end{matrix}$$

$$k = -2 \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \operatorname{rank} A = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \checkmark \end{matrix}$$

$$\operatorname{rank} C = ?$$

$$(\operatorname{rank} C \geq \operatorname{rank} A)$$

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 4 - k \\ k & 4 & 4 \end{array} \right) \quad \operatorname{rank} C = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \cancel{3} \end{matrix}$$

$$k \neq \pm 2 \Rightarrow \operatorname{rank} C \geq 2 \Rightarrow \operatorname{rank} C = 2$$

$$k = 2 \quad , \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{array} \right) \quad , \quad \operatorname{rank} C = 1$$

perché tutte le matrici 2×2 hanno determinante 0.

$$k = -2, \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 4 \end{array} \right) \quad , \quad \operatorname{rank} C \geq 1$$

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = -8 - 24 = -32 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rank } C = 2$$

k	$\text{rank}(A)$	$\text{rank}(C)$	W	
$\neq \pm 2$	2	2	$\dim = 2 - 2 = 0$	Unica soluz.
$+ 2$	1	1	$\dim = 2 - 1 = 1$	rette
$- 2$	1	2	$\emptyset$	

Esercizio Trovare W .