Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 20-09-2016

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. **(10 punti)** Data la funzione

$$f(x,y) = 2x^3 + 3y^2 - 6xy - 6x + 6y + 3$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \leq y \leq 0\right\}\,.$$

Esercizio 2. **(12 punti)** Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{y-x}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\,, y \geq \frac{1}{2}\,, y \geq x + \frac{1}{2}\right\}$.

Esercizio 3. **(12 punti)** Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sin(x) + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}\,, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(0\,,\, \frac{1}{2}\,,\, -\frac{1}{2}\right)$;

ii) fare un disegno approssimativo di Σ e scriverne una parametrizzazione globale;

iii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sin(x) + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{2}\,, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}\,.$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = 2x^3 + 3y^2 - 6xy - 6x + 6y + 3$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 6\,(x^2 - y - 1) = 0 \\ 6\,(y - x + 1) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $y = x - 1$, che sostituito nella prima, porta a dover risolvere l'equazione

$$x^2 - x = 0\,,$$

che ha soluzioni $x = 0$ e $x = 1$. Otteniamo quindi i due punti critici

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per caratterizzare i due punti critici andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione differenziabile due volte su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Sostituendo i punti critici troviamo:

$$Hf(C_1) = Hf(0\,,\,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_1) = -36 < 0$, dunque C_1 è punto di sella;

$$Hf(C_2) = Hf\,(1\,,\,0) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_2) = 36 > 0$ e $\operatorname{tr} Hf(C_2) = 18 > 0$, dunque C_2 è punto di minimo locale.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \leq y \leq 0\right\}.$$

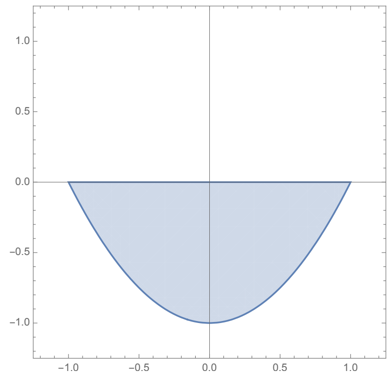

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

L'insieme $\bar{\Omega}$ è il triangolo rappresentato nella figura 1.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione f è un polinomio e dunque non ha punto di non differenziabilità. I punti critici liberi sono stati trovati al punto (i), e non sono interni a $\bar{\Omega}$. Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \{y = 0\,,\ -1 \le x \le 1\}\ ,$$

$$\Gamma_2 = \left\{y = x^2 - 1\,,\ -1 \le x \le 1\right\}\ ,$$

Per quanto riguarda Γ_1, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\,0)\,, \qquad t \in [-1\,,\,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 2t^3 - 6t + 3\,, \qquad t \in [-1\,,\,1]\ .$$

Risulta $g_1'(t) = 6t^2 - 6$, dunque non ci sono punti critici interni all'intervallo $[-1\,,\,1]$ (i punti critici $\bar{t} = \pm 1$ sono sul bordo e corrispondono agli spigoli).

Per quanto riguarda Γ_2, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(t\,,\,t^2 - 1\right), \qquad t \in [-1\,,\,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 3t^4 - 4t^3\,, \qquad t \in [-1\,,\,1]\ .$$

Risulta $g_2'(t) = 12t^2(t-1)$, e dunque c'è un solo punto critico interno all'intervallo $[-1\,,\,1]$ in $t_1 = 0$, cui corrisponde il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_2\,(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

che coincide con il punto critico libero C_1.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = -1\,, \quad f(S_2) = 7\,, \quad f(Q_1) = 0\,.$$

Dunque il massimo di f è 7 e il minimo è -1.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{y-x}{x^2+y^2}\; dx\,dy$$

dove $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,, y \ge \frac{1}{2}\,, y \ge x + \frac{1}{2}\big\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

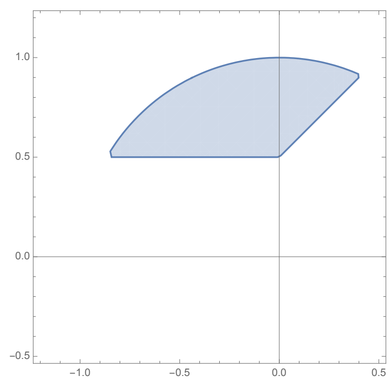

Figure 2: L'insieme Ω.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{y-x}{x^2+y^2}\; dx\,dy = \iint_S (\sin\theta - \cos\theta)\, d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty)\times[-\pi,\pi] \,:\, \rho^2 \le 1\,,\, \rho\sin\theta \ge \frac{1}{2}\,,\, \rho\sin\theta \ge \rho\cos\theta + \frac{1}{2}\right\}$$

Le prime due condizioni ci dicono che

$$\rho \in [0,1] \quad \text{e} \quad \theta \in [0,\pi] \ .$$

Inoltre la seconda condizione si riscrive come

$$\rho \geq \frac{1}{2\sin\theta} \ .$$

L'ultima condizione per S si riscrive invece come insieme di soluzione dei due sistemi

$$\begin{cases} \sin\theta - \cos\theta > 0 \\ \rho \geq \frac{1}{2\,(\sin\theta - \cos\theta)} \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} \sin\theta - \cos\theta < 0 \\ \rho \leq \frac{1}{2\,(\sin\theta - \cos\theta)} \end{cases}$$

Osserviamo subito che il secondo sistema non ha soluzioni, dovendo essere $\rho > 0$ ed essendo $\frac{1}{2\,(\sin\theta-\cos\theta)} < 0$. Inoltre essendo interessati solo all'intervallo $\theta \in [0,\pi]$, la condizione $\sin\theta - \cos\theta > 0$ è equivalente a $\theta \in (\frac{\pi}{4},\pi]$. Dunque l'insieme S è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4},\pi\right] \\ \rho \geq \frac{1}{2\ \sin\theta} \\ \rho \geq \frac{1}{2\,(\sin\theta-\cos\theta)} \end{cases}$$

ed è rappresentato in figura 3 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per scriverlo come insieme

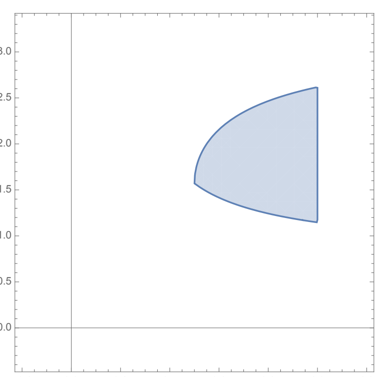

Figure 3: L'insieme S.

semplice dobbiamo considerare che $\frac{1}{2\ \sin\theta} \leq \frac{1}{2\,(\sin\theta-\cos\theta)}$ in $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$, e usare due angoli: la soluzione in $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ di

$$\frac{1}{2\,(\sin\theta - \cos\theta)} = 1$$

che chiameremo θ_1; la soluzione in $[\frac{\pi}{2},\pi]$ di

$$\frac{1}{2\ \sin\theta} = 1$$

che è data da $\frac{5}{6}\pi$. Con questi dati possiamo dunque scrivere S come unione di due insiemi semplici,

$$S = \left\{ (\rho, \theta) \,:\, \theta_1 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \,,\, \frac{1}{2\,(\sin\theta - \cos\theta)} \leq \rho \leq 1 \right\} \quad \bigcup \quad \left\{ (\rho, \theta) \,:\, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi \,,\, \frac{1}{2\,\sin\theta} \leq \rho \leq 1 \right\} .$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{y - x}{x^2 + y^2}\,dx\,dy = \iint_S (\sin\theta - \cos\theta)\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2\,(\sin\theta - \cos\theta)}}^{1} (\sin\theta - \cos\theta)\,d\rho \right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\int_{\frac{1}{2\,\sin\theta}}^{1} (\sin\theta - \cos\theta)\,d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - \cos\theta) \left(1 - \frac{1}{2\,(\sin\theta - \cos\theta)} \right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi} (\sin\theta - \cos\theta) \left(1 - \frac{1}{2\,\sin\theta} \right) d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\frac{5}{6}\pi} (\sin\theta - \cos\theta)\,d\theta - \int_{\theta_1}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{1}{2}\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{\cos\theta}{2\,\sin\theta}\,d\theta =$$

$$= -\cos\frac{5}{6}\pi + \cos\theta_1 - \sin\frac{5}{6}\pi + \sin\theta_1 - \frac{5\pi}{12} + \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{2}\,\log(\sin\frac{5}{6}\pi) - \frac{1}{2}\,\log(\sin\frac{\pi}{2}) =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{1 + \sqrt{7}}{4} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{8}} - \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2}\,\arcsin\left(\frac{1 + \sqrt{7}}{4} \right) - \frac{1}{2}\,\log 2\,,$$

dove abbiamo usato che $\sin\theta_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sin(x) + y^2 + z^2 = \frac{1}{2} \,,\, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(0\,,\,\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{2}\right)$;

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x, y, z) = \sin(x) + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}$$

che verifica

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \nabla F\left(0\,,\,\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$x + \left(y - \frac{1}{2}\right) - \left(z + \frac{1}{2}\right) = 0\,.$$

ii) fare un disegno approssimativo di Σ e scriverne una parametrizzazione globale;

Scrivendola nella forma

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y^2 + z^2 = \frac{1}{2} - \sin(x) \, , \, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

la superficie si può interpretare come superficie di rotazione, ottenuta facendo ruotare intorno all'asse x il grafico della funzione $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin(x)}$. Osserviamo che nell'intervallo dato $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la funzione $g(x)$ è definita in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$, dunque parametrizzandola come superficie di rotazione possiamo scrivere che $\Sigma = \sigma(D)$ dove

$$D = \left\{ (t, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \, : \, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{6} \right\}$$

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{con} \qquad \sigma(t,\varphi) = \left(t \, , \, \sqrt{\frac{1}{2} - \sin(t)} \, \cos\varphi \, , \, \sqrt{\frac{1}{2} - \sin(t)} \, \sin\varphi \right)$$

Il disegno di Σ è in figura 4.

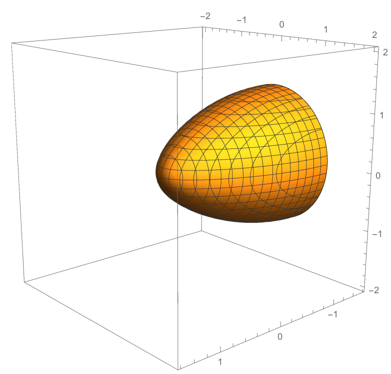

Figure 4: La superficie Σ.

iii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \sin(x) + y^2 + z^2 \le \frac{1}{2} \, , \, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \right\} .$$

Da quello che abbiamo visto al punto (ii), possiamo considerare V come solido di rotazione della forma

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, a \le x \le b \, , \, y^2 + z^2 \le g^2(x) \right\}$$

dove $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{6}$ e $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin(x)}$. Calcoliamo il volume di V integrando per strati, usando la formula

$$\text{Volume}(V) = \iiint_V 1 \, dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\iint_{V_x} 1 \, dydz \right) dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} g^2(x) \, dx$$

dove
$$V_x = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 + z^2 \leq g^2(x)\right\} \,,$$
e dunque $\iint_{V_x} 1\, dydz = \pi\, g^2(x)$. Ponendo $g^2(x) = \frac{1}{2} - \sin(x)$ troviamo dunque
$$\text{Volume}(V) = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \sin(x)\right) dx = \pi \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) .$$