Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Prova intermedia del 20-11-2024

Esercizio 1. (15 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 - y^2 \\ \dot{y} = x^4 - x^2 \end{cases}$$

(a) Studiare eventuali simmetrie del sistema e l'esistenza di rette invarianti.

(b) Disegnare il ritratto di fase.

Esercizio 2. (15 punti) Si consideri la funzione hamiltoniana

$$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad H(x,y) = \frac{1}{2}\,y^2 + \mu\left(\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3\right)$$

al variare di $\mu \in [0,+\infty)$.

(a) Scrivere il sistema hamiltoniano di equazioni differenziali associato ad H.

(b) Disegnare il ritratto di fase del sistema hamiltoniano al variare di $\mu \in [0,+\infty)$.

(c) Per $\mu > 0$, si indichi con $(x_\mu(t;(x_0,y_0)), y_\mu(t;(x_0,y_0)))$ la soluzione del sistema hamiltoniano con condizione iniziale (x_0,y_0).

- Si calcoli $\lim_{t\to+\infty} x_\mu\left(t;\left(-\frac{1}{2},0\right)\right)$.
- Si dica se esistono $c(\mu) \in \mathbb{R}$ e $\alpha(\mu) \in (0,+\infty)$ tale che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y_\mu(t;(x_0,0))}{c(\mu)\ (x_\mu(t;(x_0,0)))^{\alpha(\mu)}} = 1$$

per ogni $x_0 < -\frac{1}{2}$.

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 - y^2 \\ \dot{y} = x^4 - x^2 \end{cases}$$

(a) Simmetrie Si consideri la trasformazione $S(x,y) = (-x,-y)$.

Si ottiene $d_{(x,y)}S(F(x,y)) = (-(x^4-y^2), -(x^4-x^2))$ e
$F(S(x,y)) = (x^4-y^2, x^4-x^2)$.

Quindi $d_{(x,y)}S(F(x,y)) = -F(S(x,y))$, e dunque se $(x(t), y(t))$ è soluzione del sistema lo è anche $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(-t), -y(-t))$.

OSS Altre riflessioni, $(x,y) \mapsto (-x,y)$ o $(x,y) \mapsto (x,-y)$, non sono simmetrie.

Rette invarianti Osserviamo innanzitutto che $\{x=c\}$ non è invariante $\forall c \in \mathbb{R}$.

Poniamo poi $I(x,y) = ax+by$, e ci chiediamo se $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, tale che $\dot{I}\big|_{\{I(x,y)=c\}} \equiv 0$. Si ha

$$\dot{I}\big|_{\{I(x,y)=c\}}(x,y) = a\dot{x} + b\dot{y}\big|_{\{ax+by=c\}} = a(x^4-y^2) + b(x^4-x^2)\Big|_{y=\frac{c-ax}{b}} =$$

$$= (a+b)x^4 - bx^2 - a\left(\frac{c-ax}{b}\right)^2 = (a+b)x^4 + x^2\left(-b-\frac{a^3}{b^2}\right) + 2\frac{a^2c}{b}x - \frac{ac^2}{b^2}$$

Quindi $\dot{I}\big|_{\{I(x,y)=c\}} \equiv 0 \iff \begin{cases} a+b=0 \\ b+\frac{a^3}{b^2}=0 \\ ac=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ b-b=0 \\ ac=0 \end{cases}$

e ricordando $b \neq 0$, l'unica soluzione è $a=-b$, $c=0$.

Dunque la retta $\{y=x\}$ è un insieme invariante.

(b) Alle informazioni trovate al punto (a) aggiungiamo lo studio dei punti fissi e il segno del campo. Grazie alla simmetria trovata, ci restringiamo al semi-piano $\{x \geq 0\}$, per poi estendere i risultati per simmetria.

Punti fissi Cerchiamo le soluzioni di $\begin{cases} x^4-y^2=0 \\ x^4-x^2=0 \end{cases}$. Troviamo dalla seconda equazione

$x^2(x^2-1)=0 \iff x \in \{0,+1,-1\}$. Sostituendo nella prima equazione, i punti fissi trovati sono

$P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (1,-1)$, $P_3 = (-1,1)$, $P_4 = (-1,-1)$.

I punti P_3 e P_4 sono i simmetrici di P_2 e P_1 rispettivamente, quindi possiamo per adesso trascurarli.

Studiamo ora la stabilità dei punti fissi.

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 & -2y \\ 4x^3 - 2x & 0 \end{pmatrix}$$

$P_0 = (0,0)$. Si ha $JF(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dunque il punto P_0 è non iperbolico.

$P_1 = (1,1)$ Si ha $JF(P_1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det JF(P_1) = 4 > 0$, $\operatorname{tr} JF(P_1) = 4 > 0$

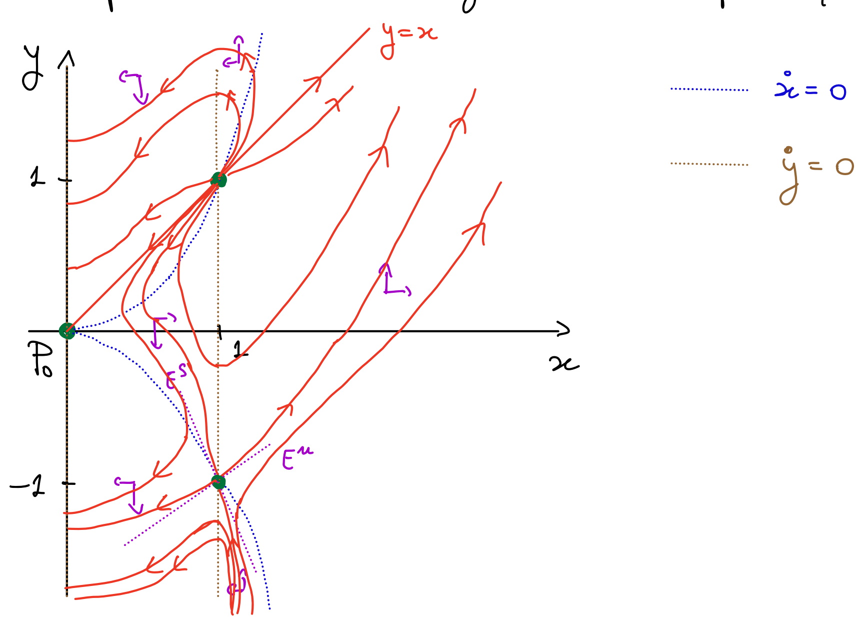
$(\operatorname{tr} JF(P_1))^2 - 4 \det JF(P_1) = 0$. Infatti $JF(P_1)$ ha autovalore $\lambda = 2$ doppio, e poiché $JF(P_1) - 2I$ ha rango 1, P_1 è un nodo improprio instabile

$P_2 = (1,-1)$ Si ha $JF(P_2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det JF(P_2) = -4 < 0$, quindi

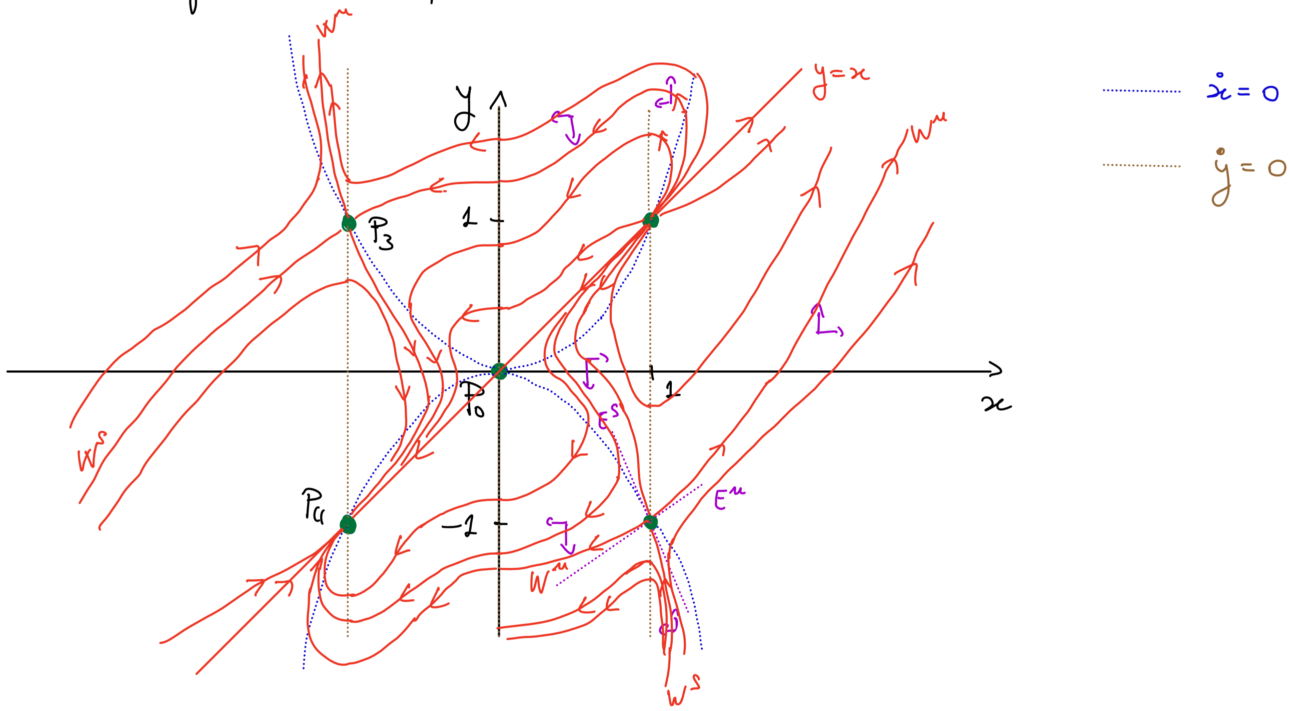
P_2 è un punto di tipo sella. Gli autovalori di $JF(P_2)$ sono

$\lambda_+ = 2(1+\sqrt{2})$, $\lambda_- = 2(1-\sqrt{2})$, con autovettori $v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$, $v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$.

Ritratto di fase. Disegniamo prima il ritratto di fase nel semi-piano $\{x \geq 0\}$.



Estendendolo per simmetria, troviamo



ESERCIZIO 2

$$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad H(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + \mu \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right)$$

$$\mu \in [0, +\infty)$$

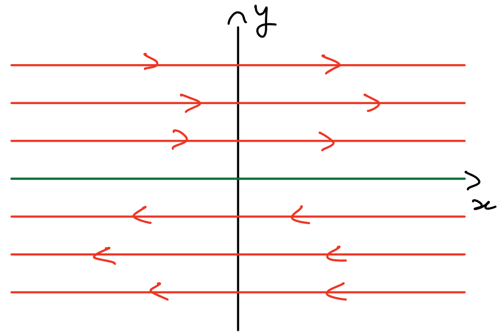
(a) Il sistema hamiltoniano associato ad H è

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\mu \left(x - x^2 \right) \end{cases}$$

(b) Consideriamo prima il caso $\underline{\mu = 0}$. In questo caso il sistema è

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

quindi le rette $\{y = c\}$ sono invarianti $\forall\, c \in \mathbb{R}$, e la retta $\{y=0\}$ è composta da punti fissi.

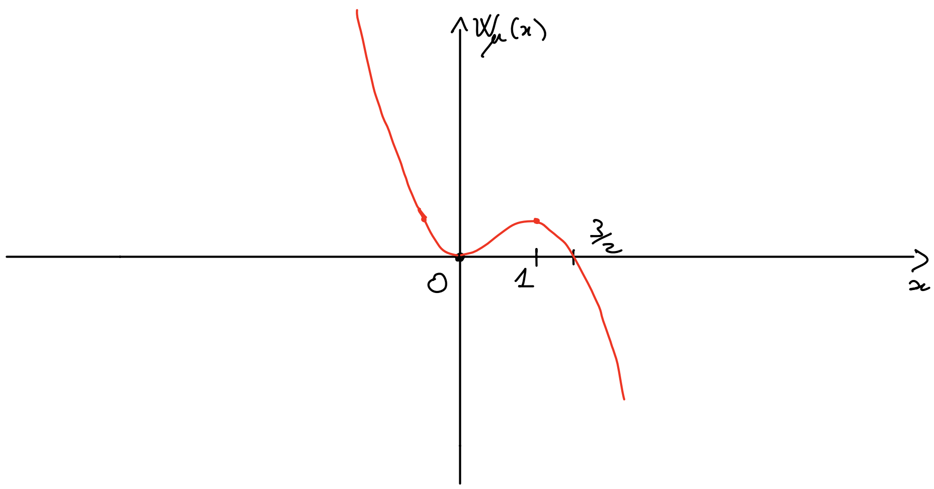


Sia ora $\mu > 0$. Disegniamo il grafico della funzione energia potenziale

$$W_\mu(x) = \mu\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$$

Osserviamo che $W_\mu(x) = 0 \iff x \in \{0, \frac{3}{2}\} \quad \forall \mu > 0$

$W_\mu'(x) = 0 \iff x \in \{0, 1\} \quad \forall \mu > 0$



Il sistema hamiltoniano associato avrà quindi due punti fissi

$$P_1 = (0,0) \quad , \quad P_2 = (1,0)$$

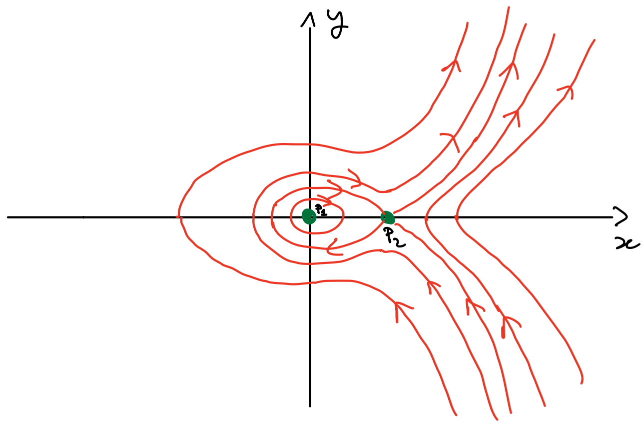
P_1 è un centro, mentre P_2 è un punto di sella.

Inoltre le orbite sono contenute negli insiemi di livello di $H(x,y)$, quindi è utile considerare l'insieme di livello

$$\{H(x,y) = H(P_2)\} = \left\{ y^2 = \mu\left(\frac{1}{3} - x^2 + \frac{2}{3}x^3\right)\right\}$$

e osserviamo che $\{H(x,y) = H(P_2)\} \cap \{y = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0\}$

Il ritratto di fase del sistema è il seguente



(c) Consideriamo $(x_0, y_0) = (-\frac{1}{2}, 0)$. Si ha $H(x_0, y_0) = W_\mu(-\frac{1}{2}) = \mu/6$, in particolare $-\frac{1}{2} \in \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0\}$, e in effetti

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0\} = \{-\tfrac{1}{2}, 1\}$$

Quindi $(-\frac{1}{2}, 0) \in \{H(x,y) = H(P_2)\}$, che contiene P_2 e un'orbita omoclina a P_2.
Ne segue che $\lim_{t \to +\infty} x_\mu(t; (-\frac{1}{2}, 0)) = 1 \quad \forall \mu > 0$.

Sia poi $(x_0, 0)$ con $x_0 < -\frac{1}{2}$. Dal ritratto di fase segue che

$$\lim_{t \to +\infty} x_\mu(t; (x_0, 0)) = +\infty$$

Inoltre $H(x_\mu(t; (x_0,0)), y_\mu(t; (x_0, 0))) = H(x_0, 0) = W_\mu(x_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
quindi per $t > 0$ si ha

$$y_\mu(t; (x_0,0)) = \sqrt{2\left[W_\mu(x_0) - W_\mu(x_\mu(t; (x_0,0)))\right]} =$$

$$= \sqrt{2\left[W_\mu(x_0) - \frac{\mu}{2}[x_\mu(t; (x_0,0))]^2 + \frac{\mu}{3}[x_\mu(t; (x_0,0))]^3\right]}$$

dunque
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y_\mu(t; (x_0,0))}{c(\mu)\,[x_\mu(t; (x_0,0))]^{\alpha(\mu)}} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{2\left[W_\mu(x_0) - \frac{\mu}{2}[x_\mu(t; (x_0,0))]^2 + \frac{\mu}{3}[x_\mu(t; (x_0,0))]^3\right]}}{c(\mu)\,[x_\mu(t; (x_0,0))]^{\alpha(\mu)}} = 1$$

se e solo se $\alpha(\mu) = 3/2 \quad \forall \mu > 0$ e $c(\mu) = \sqrt{\frac{2}{3}\mu}$.