

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 20-02-2025

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\mu y + 2y - x^5 - 3x^7 \\ \dot{y} &= x - y^3 - 2\mu y^5 \end{cases}$$

al variare di $\mu \in [0, +\infty)$.

- (i) Per $\mu \neq 2$, discutere la stabilità del punto fisso $P = (0, 0)$.
- (ii) Per $\mu = 2$, disegnare il ritratto di fase.

Esercizio 2. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \mu y^2 \\ \dot{y} = y - x^2 \end{cases}$$

al variare di $\mu \in [0, +\infty)$.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la famiglia di funzioni continue $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & x \in J_1 = [0, \frac{1}{3}] \\ (3 - 2\lambda)x + \lambda - 1, & x \in J_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ (3 - \lambda)(1 - x), & x \in J_3 = [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in [0, 3]$.

- (i) Determinare esistenza e stabilità dei punti fissi.
- (ii) Discutere il comportamento caotico di f_λ .

ESERCIZIO

1

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu y + 2y - x^5 - 3x^7 \\ \dot{y} = x - y^3 - 2\mu y^5 \end{cases}, \mu \in [0, +\infty)$$

(a)

Sia $\mu \neq 2$. Il punto $P = (0,0)$ è fisso e si verifica che

$$JF(P) = \left(\begin{array}{cc} -5x^4 - 21x^6 & -\mu + 2 \\ 1 & -3y^2 - 10\mu y^4 \end{array} \right) \Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu + 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det JF(P) = \mu - 2$ e $\text{tr} JF(P) = 0$, otteniamo che:

- se $\mu \in [0, 2)$, allora $\det JF(P) < 0$ e quindi P è un punto iperbolico instabile di tipo sella;
- se $\mu \in (2, +\infty)$, si ha $\det JF(P) > 0$, e quindi P è un punto non iperbolico di tipo centro. Quindi per studiare la stabilità di P cerchiamo una funzione di Lyapunov.

Poniamo $V(x,y) = Ax^{2m} + By^{2m}$, con $A, B > 0$, e $m \in \mathbb{N}$.

La funzione V verifica:

- $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$;
- $V(x,y) > V(0,0) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Quindi resta da studiare $\dot{V}(x,y)$. Si trova

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= 2mAx^{2m-1} [(-\mu+2)y - x^5 - 3x^7] + 2mBy^{2m-1} [x - y^3 - 2\mu y^5] = \\ &= -(2mAx^{2m+4} + 6mAx^{2m+6} + 2mBy^{2m+2} + 4m\mu By^{2m+4}) + \\ &\quad + 2m(-\mu+2)Ax^{2m-1}y + 2mBxy^{2m-1} \end{aligned}$$

Quindi se

$$2m-1=1, \quad 1=2m-1, \quad 2m(-\mu+2)A + 2mB = 0 \quad (*)$$

troviamo $\dot{V}(x,y) < 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Poiché $\mu > 2$, una soluzione di (*) è $m=1, A=1, B=\mu-2$,

e quindi: $V(x,y) = x^2 + (y-2)y^2$ è una funzione di Lyapunov
adatta per $P=(0,0)$.

Per il Secondo Teorema di Lyapunov, P è asintoticamente stabile.

(b)

Sia $\mu=2$. Il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^5(1+3x^2) \\ \dot{y} = x - y^3(1+4y^2) \end{cases}$$

Si trova che $P=(0,0)$ è l'unico punto fisso ed è non iperbolico. Per
la stabilità studiamo il ritratto di fase.

Invarianti. È immediato verificare che la retta $\{x=0\}$ è invariante,
infatti ponendo $I(x,y) = x$, si trova $\dot{I} \neq 0$ su $\{I=0\}$ e
 $\dot{I}|_{\{I=0\}}(x,y) = \dot{x}|_{x=0} = 0$.

Non ci sono altre rette invarianti.

Simmetria. Il campo di vettori $F(x,y)$ verifica $F(-x,-y) = -F(x,y)$,
quindi $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(t), -y(t))$ è soluzione se $(x(t), y(t))$ è
soluzione. Si verifica infatti che

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\dot{x}(t) = x(t)^5(1+3x(t)^2) = -(-x(t))^5(1+3(-x(t))^2) = -\tilde{x}(t)^5(1+3(\tilde{x}(t))^2)$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = -\dot{y}(t) = -x(t) + y(t)^3(1+4y(t)^2) = \tilde{x}(t) - \tilde{y}(t)^3(1+4\tilde{y}(t)^2)$$

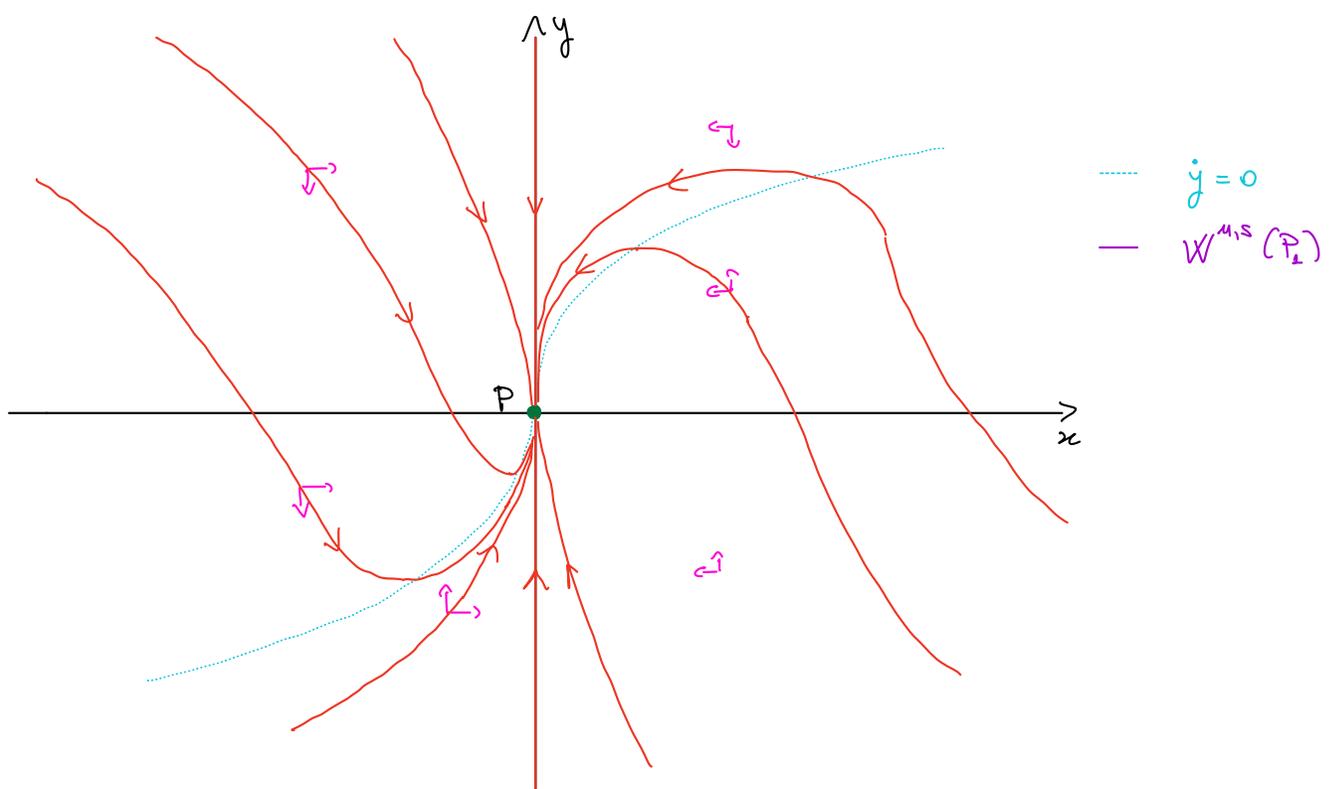
Orbite periodiche. Calcoliamo

$$\text{div}(F)(x,y) = -5x^4 - 21x^6 - 3y^2 - 20y^4 < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Dunque possiamo applicare una facile generalizzazione del criterio di
Bendixon-Dulac per dimostrare che non ci sono orbite periodiche.

Ritratto di fase. Utilizzando il segno del campo possiamo disegnare il ritratto
di fase. Osserviamo anche che

$$\dot{y} = x - y^3(1+4y^2) \sim x - y^3 \quad \text{per } y \rightarrow 0$$



ESERCIZIO
2

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \mu y^2 \\ \dot{y} = y - x^2 \end{cases}, \quad \mu \in [0, +\infty).$$

Punti fissi. Si nota subito che il caso $\mu=0$ è particolare, quindi separiamo due casi:

- se $\mu=0$, c'è un solo punto fisso $P_1 = (0,0)$
- se $\mu \in (0, +\infty)$, ci sono due punti fissi, $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\mu^{-1/3}, \mu^{-2/3})$

Per la stabilità dei punti fissi usiamo

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2\mu y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

- $P_1 = (0,0)$, $JF(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, che ha $\lambda=1$ autovalore doppio con molteplicità

geometrica 2. Quindi P_1 è un punto iperbolico di tipo stella instabile per ogni $\mu \in [0, +\infty)$.

$$- \underline{P_2} = (\underline{\mu^{-1/3}}, \underline{\mu^{-2/3}}), \mu \in (0, +\infty), \quad JF(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2\mu^{1/3} \\ -2\mu^{-1/3} & 1 \end{pmatrix},$$

quindi $\det JF(P_2) = -3 < 0$ e $\underline{P_2}$ è un punto iperbolico instabile di tipo sella per ogni $\mu \in (0, +\infty)$. Gli autovalori di $JF(P_2)$ sono $\lambda_+ = 3$ con autovettore $v_+ = \begin{pmatrix} -\mu^{2/3} \\ 1 \end{pmatrix}$, e $\lambda_- = -1$ con autovettore $v_- = \begin{pmatrix} \mu^{2/3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Invarianti.

- Se $\underline{\mu = 0}$, la retta $\{x=0\}$ è invariante, infatti se $I(x,y) = x$, si ha $\nabla I|_{\{I=0\}} \neq 0$ e $\dot{I}|_{\{I=0\}}(x,y) = \dot{x}|_{x=0} = 0$.
Non ci sono altre rette invarianti.

- Se $\underline{\mu \in (0, +\infty)}$, pensiamo $I(x,y) = ax + by$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha $\nabla I \neq 0$ e per $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \dot{I}|_{\{I=c\}}(x,y) &= (a \dot{x} + b \dot{y})|_{y = \frac{c-ax}{b}} = ax - a\mu \left(\frac{c-ax}{b}\right)^2 + c - ax - bx^2 = \\ &= \left(-\mu \frac{a^3}{b^2} - b\right)x^2 + 2\mu \frac{a^2c}{b^2}x + c - \mu \frac{ac^2}{b} = 0 \quad \forall x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu a^3 + b^3 = 0 \\ a^2c = 0 \\ c(b - \mu ac) = 0 \end{cases} \quad . \quad \text{Poiché } a \neq 0, \text{ troviamo } c=0 \text{ e } b = -\mu^{2/3} a.$$

Quindi la retta $\{y = \mu^{-1/3}x\}$ è invariante.

Simmetrie.

- Se $\underline{\mu = 0}$, si verifica che per $S(x,y) = (-x,y)$ si ha

$$F(S(x,y)) = dS(F(x,y))$$

Quindi se $(x(t), y(t))$ è soluzione, lo è anche $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(t), y(t))$

Infatti

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\dot{x}(t) = -x(t) = \tilde{x}(t)$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \dot{y}(t) = y(t) - x(t)^2 = \tilde{y}(t) - (-x(t))^2 = \tilde{y}(t) - \tilde{x}(t)^2.$$

- Se $\underline{\mu \in (0, +\infty)}$, è la retta invariante $\{y = \mu^{-1/3}x\}$ ad essere

asse di simmetria. Poniamo infatti

$$S(x,y) = (\mu^{1/3} y, \mu^{-1/3} x).$$

Si trova

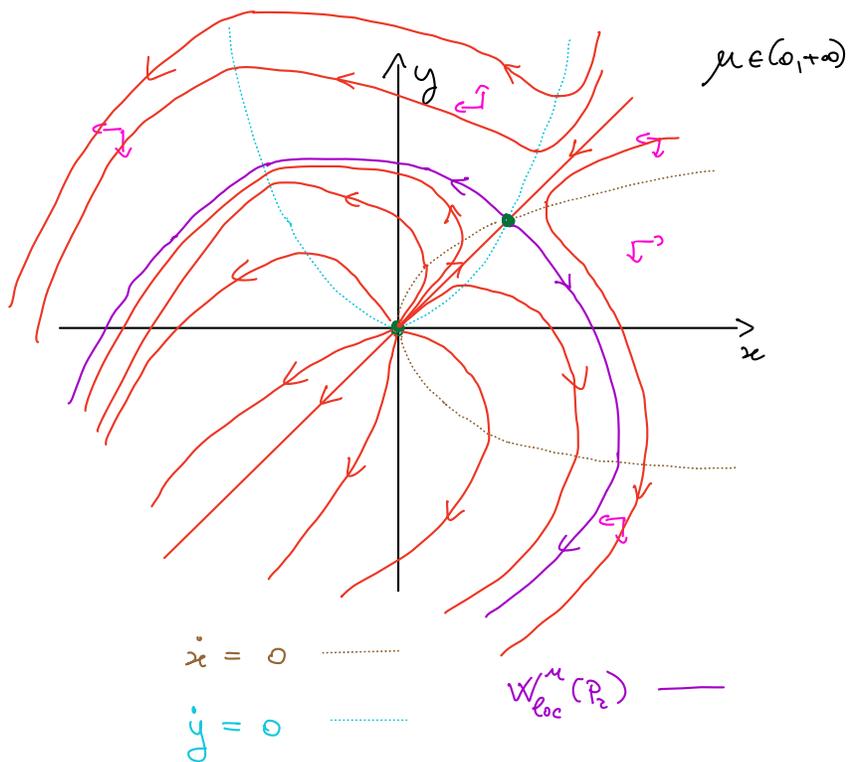
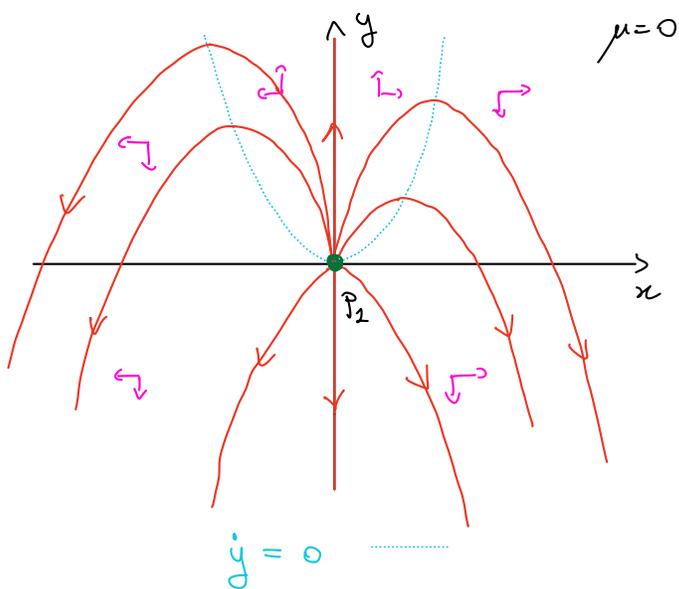
$$\begin{aligned} F(S(x,y)) &= F(\mu^{1/3} y, \mu^{-1/3} x) = (\mu^{1/3} y - \mu^{1/3} x^2, \mu^{-1/3} x - \mu^{2/3} y^2) \\ &= (\mu^{1/3} (y - x^2), \mu^{-1/3} (x - \mu y^2)) = \Delta S(F(x,y)) \end{aligned}$$

Quindi, se $(x(t), y(t))$ è soluzione, lo è anche

$$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (\mu^{1/3} y(t), \mu^{-1/3} x(t)).$$

Orbite periodiche. Non possono esistere perché $\text{div}(F)(x,y) = 2 > 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Ritratto di fase. Consideriamo separatamente il caso $\mu = 0$ e $\mu \in (0, +\infty)$.

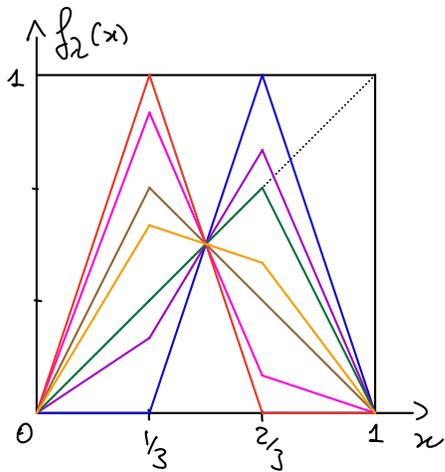


ESERCIZIO

3

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & \text{se } x \in J_1 = [0, 1/3] \\ (3-2\lambda)x + \lambda - 1, & \text{se } x \in J_2 = [1/3, 2/3] \\ (3-\lambda)(1-x), & \text{se } x \in J_3 = [2/3, 1] \end{cases}$$

el varare di $\lambda \in [0, 3]$



$$\lambda = 0$$

$$\lambda \in (0, 1)$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda \in (1, 2)$$

$$\lambda = 2$$

$$\lambda \in (2, 3)$$

$$\lambda = 3$$

(a)

Come si vede dal grafico, ci aspettiamo diversi comportamenti al variare di λ .

Ci sono due punti fissi che esistono per ogni $\lambda \in [0, 3]$:

$$\underline{x_1 = 0}, \quad \underline{x_2 = \frac{1}{2}}.$$

Per $\lambda < 1$, è fisso anche il punto $x_3 = \frac{3-\lambda}{4-\lambda} \in (\frac{2}{3}, 1)$

Per $\lambda = 1$, sono punti fissi anche tutti i punti del segmento $[0, \frac{2}{3}]$.

Studiamo la stabilità dei punti fissi (il caso $\lambda = 1$ è a parte)

• $x_1 = 0$. Si ha $|f'_\lambda(0)| = |\lambda|$, quindi:

- se $\lambda \in [0, 1)$, x_1 è attrattivo;

- se $\lambda \in (1, 3]$, x_1 è repulsivo.

• $x_2 = \frac{1}{2}$. Si ha $|f'_\lambda(\frac{1}{2})| = |3-2\lambda|$, quindi:

- se $\lambda \in [0, 1) \cup (2, 3]$, x_2 è repulsivo;

- se $\lambda \in (1, 2)$, x_2 è attrattivo;

- se $\lambda = 2$, $(f'_\lambda|_{\sigma_2})^2 = \text{Id}$, quindi x_2 è stabile ma non attrattivo.

• $x_3 = \frac{3-\lambda}{4-\lambda}$ per $\lambda \in [0, 1)$. Si ha $|f'_\lambda(x_3)| = |3-\lambda|$, quindi:

- se $\lambda \in [0, 1)$, x_3 è repulsivo.

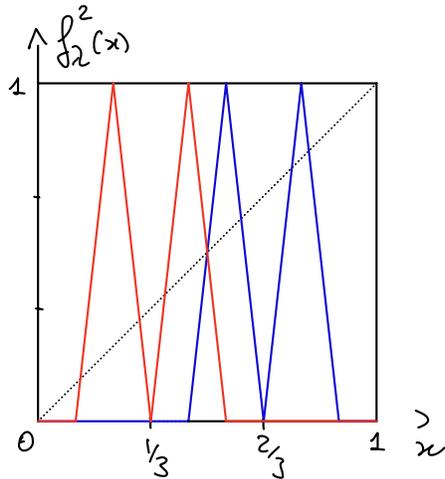
• $[0, \frac{2}{3}]$ per $\lambda = 1$. Si ha $f_1|_{[0, \frac{2}{3}]} = \text{Id}$. Quindi i punti di $[0, \frac{2}{3}]$

sono stabili ma non attrattivi. Invece $\frac{2}{3}$ verifica

$(f_1)'(\frac{2}{3}) = 1$, $(f_2)'(\frac{2}{3}) = -2$, quindi $\frac{2}{3}$ è semi-stabile (stabile ma non attrattivo da sinistra, repulsivo da destra).

(b)

Per discutere il comportamento caotico di f_2 , consideriamo i due casi estremi, $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$, e disegniamo i grafici di f_2^2 .



$\lambda = 0$

$\lambda = 3$

Per $\lambda = 0$, si vede che f_2^2 ha un fuoco di cavallo in $[\frac{1}{2}, 1]$, mentre per $\lambda = 3$, il fuoco di cavallo di f_2^2 è $[0, \frac{1}{2}]$.

Consideriamo ora $\lambda \in (0, 1)$ e l'intervallo $J_\lambda = [\frac{1}{2}, f_2(\frac{2}{3})] = [\frac{1}{2}, 1 - \frac{\lambda}{3}]$

Esiste $y_1 \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \subset [\frac{1}{2}, 1 - \frac{\lambda}{3}]$ tale che $f_2(y_1) = \frac{2}{3}$ e quindi

$f_2^2(y_1) = 1 - \frac{\lambda}{3}$ ($y_1 = \frac{5-3\lambda}{9-6\lambda}$). Poiché $f_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, si ha $f_2^2[\frac{1}{2}, y_1] = J_\lambda$.

Una condizione sufficiente perché J_λ sia un fuoco di cavallo di f_2^2 è allora

$f_2^2(\frac{2}{3}) \leq \frac{1}{2} \iff \lambda \in (0, \frac{3-\sqrt{3}}{2}]$. Si potrebbero ottenere altri valori di λ

guardando $f_2^2|_{[2/3, 1-\lambda/3]}$.

Quindi se $\lambda \in [0, \frac{3-\sqrt{3}}{2}]$, f_2 è caotica.

Analogamente, per $\lambda \in (2, 3)$, consideriamo $J_\lambda = [f_2^2(\frac{1}{3}), \frac{1}{2}] = [(3-\lambda)(1-\frac{2}{3}), \frac{1}{2}]$.

Poiché $(3-\lambda)(1-\frac{2}{3}) < \frac{1}{3} \iff \lambda \in (2, 4)$, e $f_2^2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$, abbiamo $\frac{1}{3} \in J_\lambda$ e

$f_2^2[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] = J_\lambda$. La condizione perché J_λ sia fuoco di cavallo per f_2^2 è

quindi $\max_{[(3-\lambda)(1-\frac{2}{3}), \frac{1}{3}]} f_{\lambda}^2(x) \geq \frac{1}{2}$. Ad esempio, sia $y_2 = \frac{1}{3\lambda}$ tale che

$$f_{\lambda}^2(y_2) = \frac{1}{3}, \quad f_{\lambda}^2(y_2) = \frac{2}{3}. \quad \text{Se } y_2 \in J_{\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{3\lambda} \geq (3-\lambda)(1-\frac{2}{3}) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1 \geq (3-\lambda)^2 \lambda$, che è verificato per $\lambda \in [\lambda_0, 3)$ per un qualche

$\lambda_0 \in (2, \frac{5}{2})$, allora $\max_{[(3-\lambda)(1-\frac{2}{3}), \frac{1}{3}]}$ $f_{\lambda}^2(x) \geq f_{\lambda}^2(y_2) = \frac{2}{3} \geq \frac{1}{2} \quad \forall \lambda \in [\lambda_0, 3)$.

Quindi se $\lambda \in [\lambda_0, 3)$, $f_{\lambda} \bar{x}$ è coattiva.

Gli intervalli di coattività che abbiamo trovato non sono ottimali. Inoltre non abbiamo escluso l'intervallo $\lambda \in (1, 2)$, perché le dinamiche per quei valori \bar{x} è dominata dal punto fisso stretto $x_2 = \frac{1}{2}$.