Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 19-09-2024

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu\, x + 6y^3 \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) Nel caso $\mu = 0$, determinare la stabilità dei punti fissi.

(b) Nel caso $\mu = 6$, disegnare il ritratto di fase.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x + 2xy \\ \dot{y} = 1 - y - xy \end{cases}$$

(a) Determinare la stabilità dei punti fissi.

(b) Dimostrare che l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ è positivamente invariante e che non esistono orbite periodiche interamente contenute in A.

(c) Disegnare un possibile ritratto di fase.

Esercizio 3. (10 punti) Dato l'intervallo $[0, 1]$, si consideri la partizione $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ con $J_1 = [0, \frac{1}{4}]$, $J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $J_4 = [\frac{3}{4}, 1]$, e la funzione $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in J_1 \\ 2x - \frac{1}{4}\,, & x \in J_2 \\ \frac{5}{4} - x\,, & x \in J_3 \\ 2 - 2x\,, & x \in J_4 \end{cases}$$

(a) Costruire l'f-grafo di $\mathcal{J}$.

(b) Trovare punti fissi e orbite periodiche di periodo 2.

(c) Trovare l'ω-limite di ogni $x \in [0, 1]$.

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + 6y^3 \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

(a) Per $\mu = 0$, l'unico punto fisso del sistema è $P = (0,0)$. Per la sua stabilità studiamo

$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 18y^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det JF(0,0) = 0$, il punto P non è iperbolico e non possiamo studiarne la stabilità usando la linearizzazione.

Cerchiamo una funzione di Lyapunov $V(x,y)$ per P. Poniamo

$$V(x,y) = A x^{2n} + B y^{2m}, \quad A, B > 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

È garantito che $V(x,y) > V(0,0) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calcoliamo $\dot{V}(x,y)$.

$$\dot{V}(x,y) = 2nA x^{2n-1} \dot{x} + 2mB y^{2m-1} \dot{y} =$$
$$= 2nA x^{2n-1} (6y^3) + 2mB y^{2m-1} (-x-y) =$$
$$= -2m B y^{2m} + \underbrace{2 \left(6nA x^{2n-1} y^3 - mB x y^{2m-1}\right)}.$$

Il termine sottolineato in verde non ha segno costante in $\mathbb{R}^2$, e scegliamo quindi le costanti in modo da annullarlo. Poniamo quindi

$$6nA = mB, \quad 2n-1 = 1, \quad 3 = 2m-1 \iff n = 1, m = 2, \quad 3A = B$$

Una possibile scelta è quindi

$$V(x,y) = x^2 + 3y^4$$

che verifica

$$\dot{V}(x,y) = -12y^4 \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Dunque V è una funzione di Lyapunov per P non stretta. Per il primo teorema di Lyapunov, abbiamo quindi che P è stabile.

Inoltre, $\{\dot{V} = 0\} = \{y = 0\}$ e l'unico insieme invariante contenuto in $\{y=0\}$ è P, come si ottiene osservando che $F(x,0) = (0, -x)$. Quindi per il criterio di La Salle, abbiamo che in realtà P è globalmente asintoticamente stabile.

(b) Per $\mu = 6$, i punti fissi del sistema sono le soluzioni di

$$\begin{cases} x + y^3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

quindi $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,-1)$, $P_2 = (-1,1)$. Per la loro stabilità usiamo

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 18y^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $P_0 = (0,0)$. Si ha

$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{autovalori} = \{6, -1\} \Rightarrow P_0 \text{ è un punto iperbolico}$$

di tipo sella, autovettori $= \left\{ v_+ = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- $P_1 = (1,-1)$. Si ha

$$JF(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det JF(1,-1) = 12, \quad \operatorname{tr} JF(1,-1) = 5,$$

$(\operatorname{tr} JF(1,-1))^2 - 4 \det JF(1,-1) = -23 < 0 \Rightarrow P_1$ è un punto iperbolico di tipo fuoco instabile.

- $P_2 = (-1,1)$. Si ha $JF(-1,1) = JF(1,-1) \Rightarrow P_2$ è un punto iperbolico di tipo fuoco instabile.

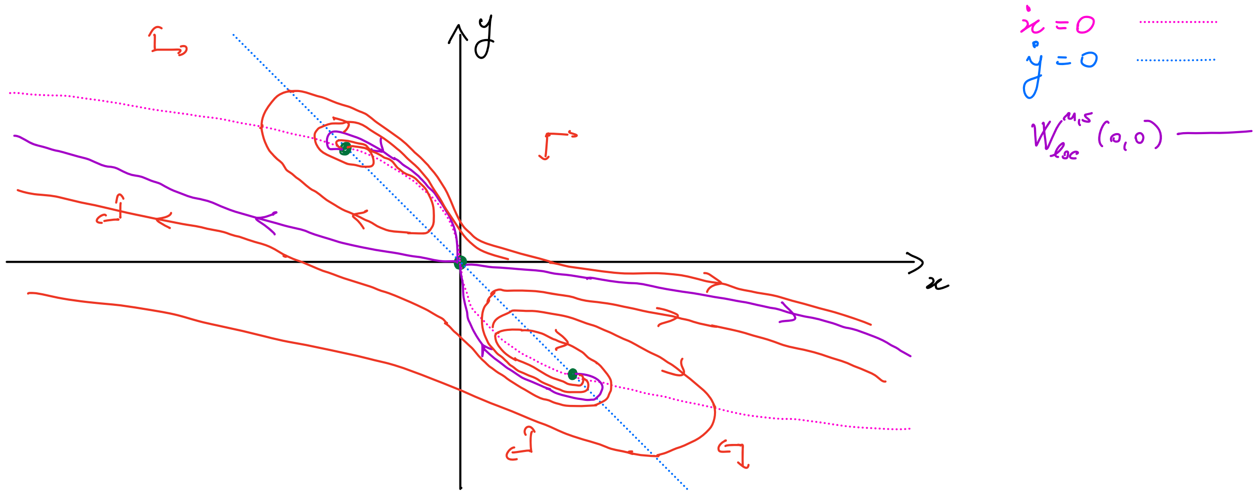
Consideriamo altre proprietà del sistema:

- insiemi invarianti. Non ci sono rette invarianti e non è immediato trovare l'espressione analitica di altri insiemi invarianti.
- simmetrie. Il sistema è simmetrico rispetto a $(0,0)$. Se $(x(t), y(t))$ è soluzione, lo è anche $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(t), -y(t))$. Infatti

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\dot{x}(t) = -6x(t) - 6y^3(t) = 6\tilde{x}(t) + 6\tilde{y}^3(t).$$

$\ddot{\tilde{y}}(t) = -\dot{y}(t) = x(t) + y(t) = -\tilde{x}(t) - \tilde{y}(t)$.

- orbite periodiche. Si ha $\operatorname{div} F(x,y) = 5 > 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi per il criterio di Bendixson-Dulac, non esistono orbite periodiche in $\mathbb{R}^2$.



$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x + 2xy \\ \dot{y} = 1 - y - xy \end{cases}$$

$\boxed{(a)}$ I punti fissi del sistema sono le soluzioni di

$$\begin{cases} 1 - 2x + 2xy = 0 \\ 1 - y - xy = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando per 2 la seconda riga e sommandola la prima si trova

$$1 - 2x + 2 - 2y = 0 \iff 2y = 3 - 2x$$

che sostituito nella prima implica

$$1 - 2x + 3x - 2x^2 = 0 \iff 2x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

I punti fissi sono quindi

$$P_1 = \left(1, \tfrac{1}{2}\right) \quad , \quad P_2 = \left(-\tfrac{1}{2}, 2\right)$$

Studiamone la stabilità lineare. Si ha

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} -2 + 2y & 2x \\ -y & -1-x \end{pmatrix}$$

- $P_1 = (1, \frac{1}{2})$. Si trova

$$JF(1,\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}, \quad \det JF(1,\tfrac{1}{2}) = 3, \quad \operatorname{tr} JF(1,\tfrac{1}{2}) = -3.$$

$(\operatorname{tr} JF(1,\frac{1}{2}))^2 - 4 \det JF(1,\frac{1}{2}) = -3 < 0$, quindi

P_1 è un punto fisso iperbolico di tipo fuoco stabile ed è asintoticamente stabile.

- $P_2 = (-\frac{1}{2}, 2)$. Si trova

$$JF(-\tfrac{1}{2},2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \det JF(-\tfrac{1}{2},2) = -3 < 0, \text{ quindi}$$

P_2 è un punto fisso iperbolico di tipo sella ed è instabile

$\boxed{(b)}$ Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0, y \geq 0\}$. Per dimostrare che l'insieme è positivamente invariante, ossia che $\phi_t(A) \subseteq A \ \forall t \geq 0$, è sufficiente mostrare che $F|_{\partial A}$ punti verso $\mathring{A}$.

Poiché $\partial A = \{x \geq 0, y = 0\} \cup \{x = 0, y \geq 0\}$, consideriamo $F(x,0) = (1-2x, 1)$ su $\{x \geq 0, y = 0\}$ e $F(0,y) = (1, 1-y)$ su $\{x = 0, y \geq 0\}$. In entrambi i casi la componente trasversale a ∂A è positiva e $F|_{\partial A}$ punta quindi verso $\mathring{A}$.

Per studiare l'esistenza di orbite periodiche interamente contenute in A, osserviamo innanzitutto che la teoria dell'indice implica che debbano circondare il punto fisso P_1. Abbiamo poi

$$\operatorname{div} F(x,y) = -2 + 2y - 1 - x = 2y - x - 3$$

Quindi $\operatorname{div} F < 0 \iff y < \frac{x+3}{2}$. Per il criterio di Bendixson-Dulac non esistono orbite periodiche interamente contenute in $\{y < \frac{x+3}{2}\}$. Inoltre su $A \cap \{y = \frac{x+3}{2}\}$ vale $F(x, \frac{x+3}{2}) = (1 + x + x^2, -\frac{1}{2} - 2x - \frac{x^2}{2})$, $x \geq 0$.

In particolare,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, F(x, \tfrac{x+3}{2}) \right\rangle = 1 + x + x^2 - \tfrac{1}{4} - x - \tfrac{x^2}{4} = \tfrac{3}{4}(1 + x^2) > 0$$

e il fatto che la seconda componente di $F(x, \frac{x+3}{2})$ sia negativa, implicano che F punti verso l'interno della regione $\{y \leq \frac{x+3}{2}\} \cap A$ sul suo bordo.

Dunque eventuali orbite periodiche interamente contenute in A devono essere contenute in $A \cap \{y \leq \frac{x+3}{2}\}$, ma questo è impossibile per il segno della divergenza.

$\boxed{(c)}$ Per disegnare un possibile ritratto di fase del sistema, osserviamo che non ci sono ovvie simmetrie e, per quanto riguarda eventuali rette invarianti, poniamo $I(x,y) = ax+by$, con $a,b \in \mathbb{R}$, e studiamo $\dot{I}\big|_{\{I=c\}}$ per qualche $c \in \mathbb{R}$.

$$\dot{I}\big|_{\{I=c\}}(x,y) = a\dot{x} + b\dot{y}\big|_{ax+by=c} =$$

$$(\text{ponendo } b \neq 0) = a(1-2x+2xy) + b(1-y-xy)\Big|_{y=\frac{c-ax}{b}} =$$

$$= a+b-2ax-by+(2a-b)xy\Big|_{y=\frac{c-ax}{b}} =$$

$$= a+b-2ax-c+ax+(2a-b)x\left(\frac{c-ax}{b}\right) =$$

$$= a+b-c+\left(-a+2\frac{ac}{b}-c\right)x+\left(-\frac{2a^2}{b}+a\right)x^2$$

Imponendo $\dot{I}\big|_{\{I=c\}} \equiv 0$ si ottiene quindi il sistema

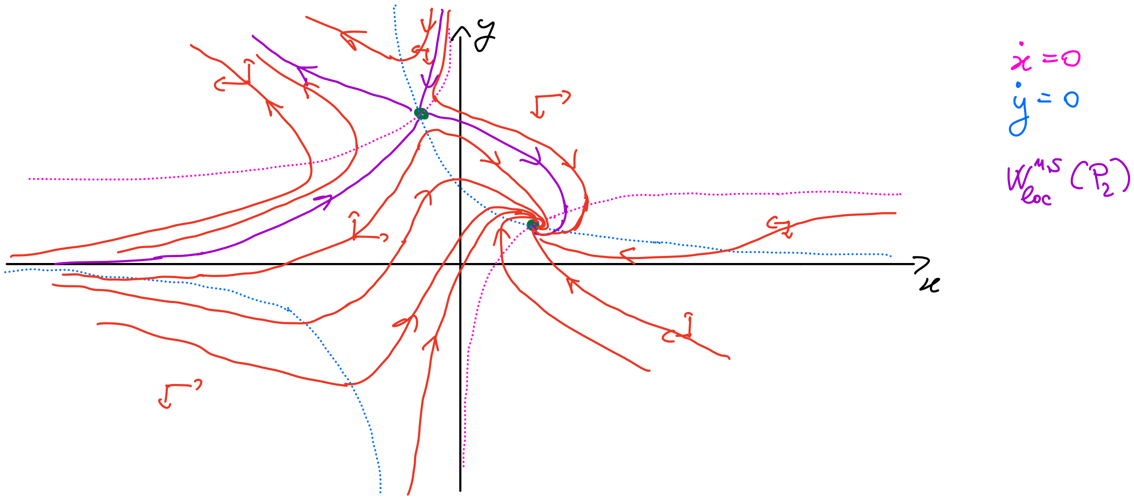
$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ \frac{2ac}{b}-a-c=0 \\ a\left(1-\frac{2a}{b}\right)=0 \end{cases}$$

Nella terza equazione poniamo $a=0 \Rightarrow c=0$ nella seconda e $b=0$ nella prima.
Se invece nella terza poniamo $b=2a \Rightarrow a=0$ nella seconda e $c=0$ nella prima.
Dunque non esistono rette invarianti della forma $ax+by=c$ con $b\neq 0$. Il caso $b=0$ si studia facilmente e si dimostra che anche in questo caso non esistono rette invarianti.

Disegniamo un possibile ritratto di fase utilizzando lo studio del segno del campo.

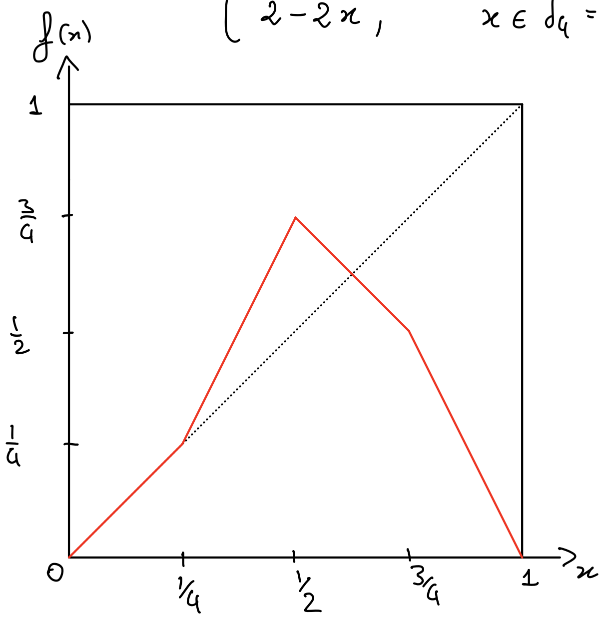
$$\dot{x}=0 \iff 1-2x+2xy=0 \iff x=\frac{1}{2(1-y)}$$

$$\dot{y}=0 \iff 1-y-xy=0 \iff y=\frac{1}{1+x}$$

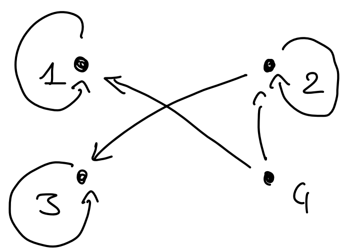


ESERCIZIO 3

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in J_1 = [0, \frac{1}{4}] \\ 2x - \frac{1}{4}, & x \in J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{5}{4} - x, & x \in J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 2 - 2x, & x \in J_4 = [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$



(a) Dalla definizione di f si ricava che $f(J_1) = J_1$, $f(J_2) = J_2 \cup J_3$, $f(J_3) = J_3$, $f(J_4) = J_1 \cup J_2$. Dunque l'f-grafo di J è



$\boxed{(b)}$

I punti fissi di f sono le soluzioni di $f(x)=x$. Dal grafico è chiaro che sono in $J_1 \cup J_3$. Infatti in J_1 tutti i punti sono fissi, mentre in J_3, la soluzione di $\frac{5}{4}-x=x$ è $x=\frac{5}{8}$.

Le orbite periodiche di periodo 2 di f includono i punti fissi e le orbite dei punti periodici di periodo minimo 2.

I punti periodici di periodo minimo 2 sono le soluzioni di

$$f^2(x)=x\,, \quad f(x)\neq x$$

e le loro orbite sono gli insiemi $\mathcal{O}(x)=\{x, f(x)\}$.

Costruiamo f^2. Su J_1 si ha $f(J_1)=J_1$, quindi

$$f^2(x)=x \qquad \forall\, x\in J_1$$

Su J_2, $f([\frac{1}{4},\frac{3}{8}])=J_2$, $f([\frac{3}{8},\frac{1}{2}])=J_3$. Quindi

$$f^2(x)=\begin{cases} 4x-\frac{3}{4}\,, & x\in[\frac{1}{4},\frac{3}{8}] \\ \frac{3}{2}-2x\,, & x\in[\frac{3}{8},\frac{1}{2}] \end{cases}$$

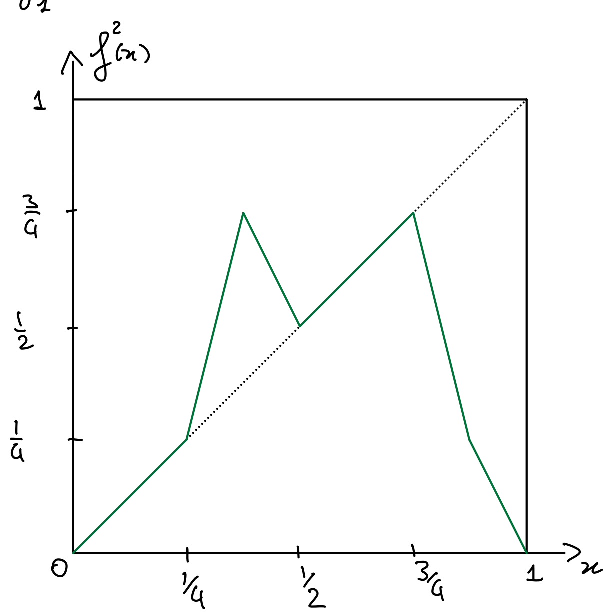
Su J_3 si ha $f(J_3)=J_3$, quindi

$$f^2(x)=x \qquad \forall\, x\in J_3$$

Su J_4, $f([\frac{3}{4},\frac{7}{8}])=J_2$, $f([\frac{7}{8},1])=J_1$. Quindi

$$f^2(x)=\begin{cases} \frac{15}{4}-4x\,, & x\in[\frac{3}{4},\frac{7}{8}] \\ 2-2x\,, & x\in[\frac{7}{8},1] \end{cases}$$

$$f_1(f_4(x)) = f_1(2-2x) = 2-2x$$



Dunque le soluzioni di $f^2(x)=x$, $f(x)\neq x$, sono i punti

$$x \in J_3 \setminus \left\{\frac{5}{8}\right\},$$

e le orbite sono gli insiemi $\mathcal{O}(x)=\left\{x, \frac{5}{4}-x\right\}$.

$\boxed{(c)}$

Se $x \in J_1 \cup \left\{\frac{5}{8}\right\}$, $\omega(x)=\{x\}$, essendo i punti fissi.

Se $x \in J_3 \setminus \left\{\frac{5}{8}\right\}$, $\omega(x)=\left\{x, \frac{5}{4}-x\right\}$, essendo i punti periodici di periodo minimo 2.

Se $x \in \mathring{J}_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, esiste $n(x)$ t.c $f^{n(x)}(x) \in J_3$. Dunque, se $f^{n(x)}(x)=\frac{5}{8}$ si ha $\omega(x)=\left\{\frac{5}{8}\right\}$, se $f^{n(x)}(x) \in J_3 \setminus \left\{\frac{5}{8}\right\}$ si ha $\omega(x)=\left\{f^{n(x)}(x), \frac{5}{4}-f^{n(x)}(x)\right\}$.

Se $x \in \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$, si ha $f(x) \in \mathring{J}_2$, quindi come sopra l'ω-limite sarà $\left\{\frac{5}{8}\right\}$ oppure un'orbita periodica $\left\{f^k(x), \frac{5}{4}-f^k(x)\right\}$ con $f^k(x) \in J_3 \setminus \left\{\frac{5}{8}\right\}$.

Se $x \in \left[\frac{7}{8}, 1\right]$, si ha $f(x)=2-2x \in J_2$ e quindi $\omega(x)=\{2-2x\}$.