Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 19-09-2022

Esercizio 1. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4 + \mu \\ \dot{y} = xy + 2x^2 - 8 \end{cases}$$

al variare di $\mu \in [0, +\infty)$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\mu\, x + y(y^2 - 1) \\ \dot{y} = 4x \end{cases}$$

al variare di $\mu \in [0, +\infty)$.

(a) Nel caso $\mu = 0$, determinare un integrale primo per il sistema.

(b) Studiare la stabilità dei punti fissi per ogni $\mu \geq 0$.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la trasformazione

$$f : [0,1] \to [0,1]\,, \quad f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\,\sin(4\pi x), & \text{per } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\,\sin(4\pi x), & \text{per } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

(a) Discutere esistenza e stabilità dei punti fissi e delle orbite periodiche di periodo 2.

(b) Discutere esistenza e stabilità delle orbite periodiche di periodo $k > 2$.

(c) Determinare l'ω-limite di tutti i punti di [0,1].

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4 + \mu \\ \dot{y} = xy + 2x^2 - 8 \end{cases} , \qquad \mu \in [0, +\infty)$$

Punti fissi

Ponendo $\begin{cases} x^2 - 4 + \mu = 0 \\ xy + 2x^2 - 8 = 0 \end{cases}$ troviamo i seguenti casi:

- $\boxed{\mu \geq 4}$. Non esistono punti fissi.

- $\boxed{\mu \in [0, 4)}$. Esistono due punti fissi

$$\boxed{P_1 = \left(\sqrt{4-\mu} , \frac{2\mu}{\sqrt{4-\mu}} \right), \quad P_2 = \left(-\sqrt{4-\mu} , -\frac{2\mu}{\sqrt{4-\mu}} \right)}$$

Poiché $JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 4x+y & x \end{pmatrix}$ si ha che:

$$JF(P_1) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{4-\mu} & 0 \\ 2\,\frac{8-\mu}{\sqrt{4-\mu}} & \sqrt{4-\mu} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \det JF(P_1) &= 2(4-\mu) > 0 \\ \operatorname{tr} JF(P_1) &= 3\sqrt{4-\mu} > 0 \end{aligned}$$

e $\operatorname{tr}^2 JF(P_1) - 4 \det JF(P_1) = 4-\mu > 0$, per cui

P_1 è un nodo instabile $\forall \mu \in [0,4)$;

$$JF(P_2) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{4-\mu} & 0 \\ -2\,\frac{8-\mu}{\sqrt{4-\mu}} & -\sqrt{4-\mu} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \det JF(P_1) &= 2(4-\mu) > 0 \\ \operatorname{tr} JF(P_1) &= -3\sqrt{4-\mu} > 0 \end{aligned}$$

e $\operatorname{tr}^2 JF(P_2) - 4 \det JF(P_2) = 4-\mu > 0$, per cui

P_2 è un nodo stabile $\forall \mu \in [0,4)$.

Insiemi invarianti Dalla prima equazione del sistema si ottiene che se $\underline{\mu \in [0,4)}$, le rette $\boxed{x=\sqrt{4-\mu}}$ e $\boxed{x=-\sqrt{4-\mu}}$ sono insiemi invarianti. Infatti se

$$I_\pm(x,y) = x \mp \sqrt{4-\mu}, \quad \text{si ha} \quad \dot{I}_\pm \Big|_{x=\pm\sqrt{4-\mu}} \equiv 0$$

Allo stesso modo, se $\underline{\mu=4}$, la retta $\boxed{x=0}$ è invariante

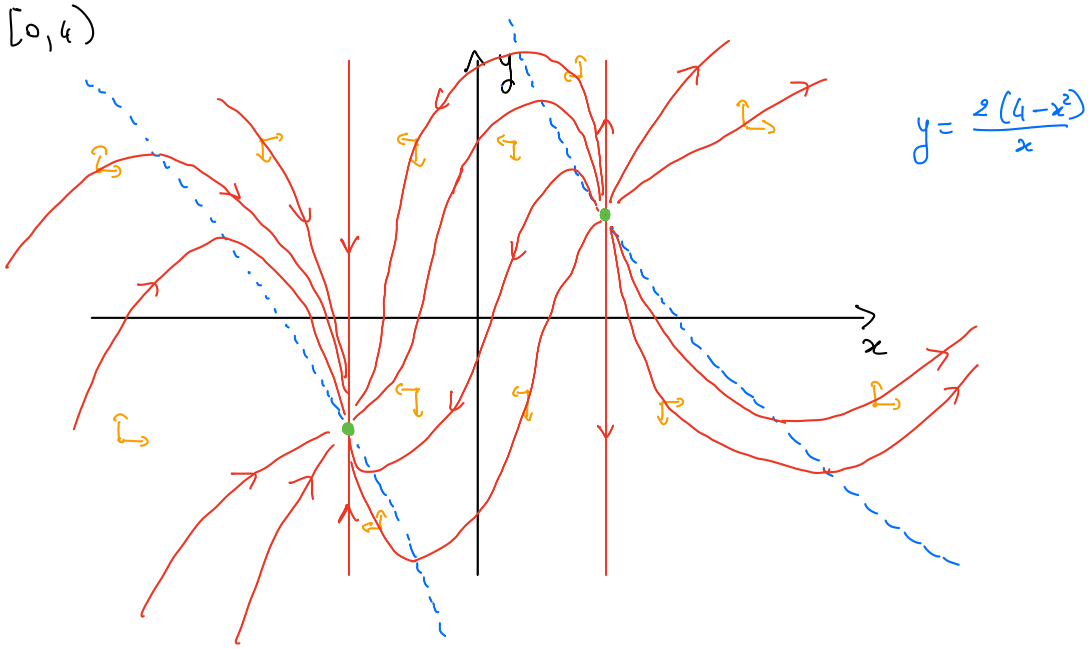
<u>Orbite periodiche</u> Per la teoria dell'indice di Poincaré, potrebbero esistere orbite periodiche solo per $\mu \in [0,4)$ e circondanti uno dei due punti fissi. L'esistenza delle rette invarianti impedisce che tali orbite periodiche esistano per l'unicità locale delle soluzioni del sistema.

<u>Simmetrie</u> Se $(x(t), y(t))$ è soluzione del sistema, lo è anche $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(-t), -y(-t))$ (invertiamo anche il verso del moto), infatti

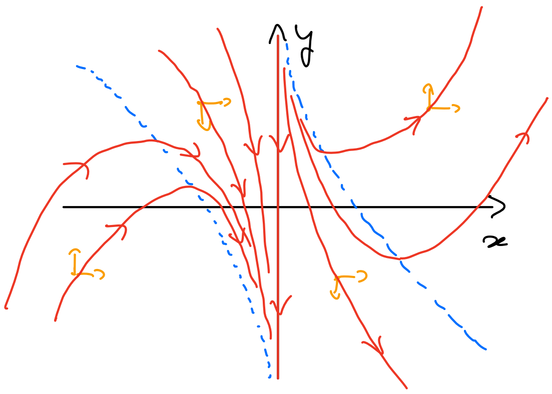
$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(-t) = x^2(-t) - 4 + \mu = \tilde{x}^2(t) - 4 + \mu \\ \dot{\tilde{y}}(t) = \dot{y}(-t) = x(-t)\,y(-t) + 2x^2(-t) - 8 = \tilde{x}(t)\,\tilde{y}(t) + 2\tilde{x}^2(t) - 8 \end{cases}$$

<u>Ritratto di fase</u> Usiamo le informazioni ottenute e il segno del campo.

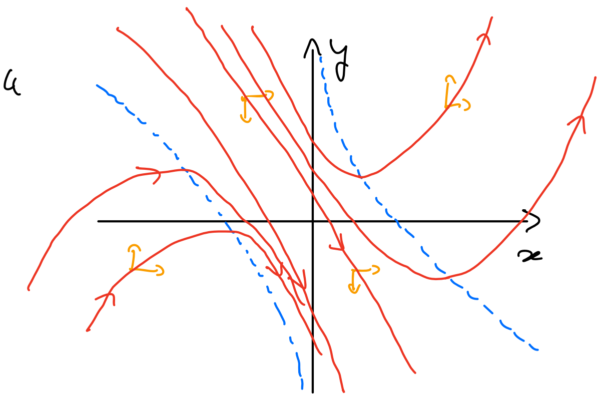
$\mu \in [0,4)$



$\mu = 4$



$\mu > 4$



ESERCIZIO 2)

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\mu x + y(y^2-1) \\ \dot{y} = 4x \end{cases}, \qquad \mu \in [0, +\infty)$$

(a) Per $\boxed{\mu = 0}$ si possono scrivere le isocline. Infatti da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{y(y^2-1)}$$

si ricava che un integrale primo del sistema è

$$\boxed{I(x,y) = \int y(y^2-1)\,dy - \int 4x\,dx = \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y^2 - 2x^2}$$

(b) I punti fissi del sistema sono

$$\boxed{P_1 = (0,0), \quad P_2 = (0,+1), \quad P_3 = (0,-1)}$$

Usando $JF(x,y) = \begin{pmatrix} -2\mu & 3y^2-1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ si ottiene che P_2 e P_3 sono punti di sella, infatti

$$JF(P_2) = JF(P_3) = \begin{pmatrix} -2\mu & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha $\det = -8 < 0 \quad \forall \mu \geq 0$.

Per P_1 si ha $JF(P_1) = \begin{pmatrix} -2\mu & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ per cui

$\det = 4 > 0$ e $tr = -2\mu$. Se $\boxed{\mu > 0}$ si ha che P_1 è stabile e

$$tr^2 - 4\det = 4\mu^2 - 16 \begin{cases} > 0 & \text{se } \mu \in (2, +\infty) \Rightarrow P_1 \text{ nodo} \\ = 0 & \text{se } \mu = 2 \Rightarrow P_1 \text{ nodo improprio} \\ < 0 & \text{se } \mu \in (0, 2) \Rightarrow P_1 \text{ fuoco} \end{cases}$$

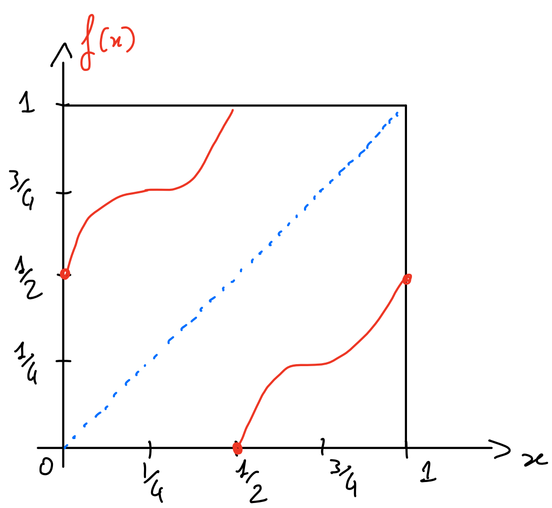
Se $\boxed{\mu = 0}$, P_1 non è iperbolico, e usiamo l'integrale primo $I(x,y)$ trovato al punto (i).

Si ha $I(P_1) = I(0,0) = 0$, e P_1 è un punto di minimo locale per $I(x,y)$. Di conseguenza gli insiemi di livello di $I(x,y)$ in un intorno di P_1 sono curve chiuse. Poiché $I(x,y)$ è un integrale primo si trova che P_1 è un punto stabile secondo Lyapunov, ma non asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 3

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\sin(4\pi x), & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\sin(4\pi x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

(a) Disegniamo il grafico di f. Osserviamo che $f(x + \frac{1}{2}) = f(x) - \frac{1}{2}$ $\forall x \in [0, \frac{1}{2})$

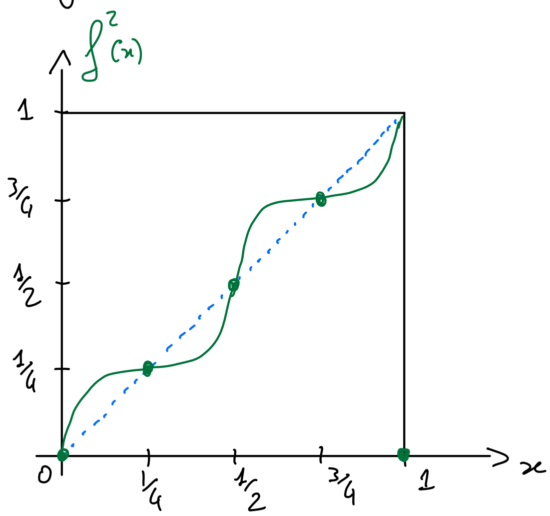


Ne segue che non esistono punti fissi per f.

Abbiamo ottenuto che $f(0)=\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2})=0$ e $f(\frac{1}{4})=\frac{3}{4}$, $f(\frac{3}{4})=\frac{1}{4}$. Quindi esistono almeno due orbite periodiche di periodo 2.

$$\boxed{\mathcal{O}_1=\{0,\tfrac{1}{2}\}}, \quad \boxed{\mathcal{O}_2=\{\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}\}}$$

Inoltre $f(1)=\frac{1}{2}$, quindi possiamo disegnare il grafico approssimato di f^2.



Abbiamo usato che $f([0,\frac{1}{4}])=[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ e $f([\frac{1}{2},\frac{3}{4}])=[0,\frac{1}{4}]$, $f([\frac{1}{4},\frac{1}{2}))=[\frac{3}{4},1)$ e $f([\frac{3}{4},1))=[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, e $\left(\frac{d}{dx}f^2\right)(x)=f'(x)\cdot f'(f(x))$. Ricaviamo che $\frac{d}{dx}f^2(x)=0 \iff x\in\{\frac{1}{4},\frac{3}{4}\}$ e inoltre possiamo mostrare che non ci sono altri punti fissi di $f^2(x)$ oltre a $\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\}$.

Infatti

$$f^2(x)=f(f(x))=\begin{cases} f(x)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi}\sin(4\pi f(x)), & x\in[0,\frac{1}{2}) \\ f(x)+\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi}\sin(4\pi f(x)), & x\in[\frac{1}{2},1) \end{cases} =$$

$$= x+\frac{1}{4\pi}\sin(4\pi x)+\frac{1}{4\pi}\sin\left(4\pi x+\sin(4\pi x)\right) \quad \forall x\in[0,1).$$

Quindi

$$f^2(x) = x \iff \frac{1}{4\pi}\left[\sin(4\pi x) + \sin\left(4\pi x + \sin(4\pi x)\right)\right] = 0$$

$$\iff \frac{1}{4\pi}\sin\left(4\pi x + \frac{1}{2}\sin(4\pi x)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\sin(4\pi x)\right) = 0$$

Poiché $x \in [0,1)$ si ha $\frac{1}{2}\sin(4\pi x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, quindi $-\frac{\pi}{2} < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$ implica $\cos\left(\frac{1}{2}\sin(4\pi x)\right) \neq 0 \quad \forall x \in [0,1)$.

Inoltre $g(x) = 4\pi x + \frac{1}{2}\sin(4\pi x)$ è una funzione crescente su $[0,1)$ essendo $g'(x) = 4\pi + 2\pi\cos(4\pi x)$, e si ha $g(0) = 0$, $g(\frac{1}{4}) = \pi$, $g(\frac{1}{2}) = 2\pi$, $g(\frac{3}{4}) = 3\pi$ e $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 4\pi$. Quindi $\sin(g(x)) = 0$ su $[0,1)$ $\iff x \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$.

Per quanto riguarda la stabilità delle orbite periodiche, possiamo calcolare

$$\frac{d}{dx}f^2(0) = f'(0)\,f'(\tfrac{1}{2}) = 4 = \frac{d}{dx}f^2(\tfrac{1}{2})$$

$$\frac{d}{dx}f^2(\tfrac{1}{4}) = f'(\tfrac{1}{4})\,f'(\tfrac{3}{4}) = 0 = \frac{d}{dx}f^2(\tfrac{3}{4})$$

(abbiamo usato che $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f'(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f'(x) = 2$)

Quindi $\mathcal{O}_1$ è repulsiva mentre $\mathcal{O}_2$ è attrattiva.

(b) Poiché $f([0,\frac{1}{2})) = [\frac{1}{2}, 1)$ e $f([\frac{1}{2},1)) = [0,\frac{1}{2})$, non possono esistere orbite periodiche di periodo dispari.
Quindi se f avesse un'orbita di periodo $2k$ con $k > 1$, allora f^2 avrebbe un'orbita di periodo $k > 1$. Questo è impossibile in quanto f^2 è invertibile e crescente su $[0,1)$, e $f^2(1) = 0$, $f^2(0) = 0$.

Quindi non ci sono orbite periodiche di f di periodo $n > 2$.

(c) Innanzitutto abbiamo determinato che

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega(0) = \omega(\tfrac{1}{2}) = \omega(1) = \vartheta_1 \\ \omega(\tfrac{1}{4}) = \omega(\tfrac{3}{4}) = \vartheta_2 \end{array}}$$

Dai risultati del punto (a) e (b) possiamo dedurre che tutti gli altri punti verranno attratti da ϑ_2, quindi

$$\boxed{\omega(x) = \vartheta_2 \qquad \forall x \neq \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, 1\}}$$