Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 18-01-2017

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (14 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = e^{(x^3+x)\,y}$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le x \le 1\,,\ -1 \le y \le x^2+1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{x\,y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le \min\left\{\sqrt{4-x^2}\,,\, 3\sqrt{1+x}\right\}\right\}$.

Esercizio 3. (8 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, \log(1+x^2) - y^3 - 2y^2 + \arctan(z^3+2z^2) = 0\right\}$$

i) scrivere, se possibile, l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nei punti:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} \sqrt{e-1} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii) determinare, se possibile, una parametrizzazione locale di Σ in un intorno dei punti P, Q del punto precedente.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = e^{(x^3+x)\,y}$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è composizione della funzione esponenziale e di un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è almeno di classe C^2 su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} (3x^2y + y)\, e^{(x^3+x)\,y} = 0 \\ (x^3 + x)\, e^{(x^3+x)\,y} = 0 \end{cases}$$

La funzione esponenziale non si annulla mai, dunque dalla seconda equazione si ricava $x(x^2+1) = 0$, che ha come unica soluzione reale $x = 0$. Sostituendo nella prima otteniamo $y = 0$. Dunque f ha un solo punto critico, dato da

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per caratterizzarlo andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Poiché f è di classe C^2 su tutto il dominio, la matrice Hessiana è simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} [(3x^2y+y)^2 + 6xy]\, e^{(x^3+x)\,y} & [(3x^2y+y)(x^3+x) + 3x^2+1]\, e^{(x^3+x)\,y} \\ [(3x^2y+y)(x^3+x) + 3x^2+1]\, e^{(x^3+x)\,y} & (x^3+x)^2\, e^{(x^3+x)\,y} \end{pmatrix},$$

e

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det Hf(0,0) = -1 < 0$. Dunque C è un punto di sella.

ii) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

La funzione di cui dobbiamo studiare il limite è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{x^2+y^2=0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il limite è della forma indeterminata $\frac{0}{0}$, dunque iniziamo a studiarne il comportamento lungo le rette della forma $y = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^3+x)\lambda x} - 1}{|x|\sqrt{1+\lambda^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x(x^3+x) + o(x^2)}{|x|\sqrt{1+\lambda^2}} = 0 \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

e

$$\lim_{y=0,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^0 - 1}{|x|} = 0.$$

Dunque se il limite esiste, è uguale a 0. Per le proprietà dell'esponenziale basta dimostrare che è 0 il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3+x)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

e per farlo cerchiamo una buona maggiorazione. Si trova

$$0 \le \left|\frac{(x^3+x)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,(x^2+1) \le \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,(x^2+1) = \frac{1}{2}\,(x^2+1)\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

e chiaramente $(x^2+1)\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ se $(x,y)\to 0$. Quindi il limite richiesto esiste ed è uguale a 0.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, -1\le x\le 1\,,\, -1\le y\le x^2+1\right\}\,.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a Ω, sui punti critici vincolati al bordo di Ω, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non differenziabilità della funzione.

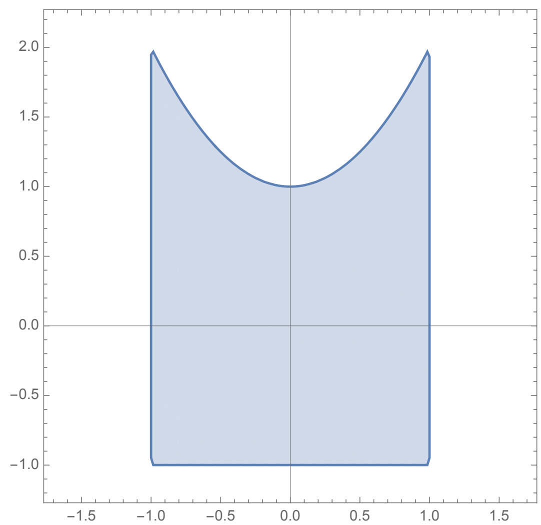

Figure 1: L'insieme Ω.

La funzione f non ha punti di non differenziabilità, e i punti critici sono stati trovati al punto i). L'unico punto critico è $C=(0,0)$ che è interno ad Ω, e va quindi preso in considerazione.

Passiamo al comportamento di f sul bordo di Ω. Gli spigoli sono i punti

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad Q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad Q_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il bordo è composto da quattro parti

$$\Gamma_1 = \{x = 1\,,\ -1 \le y \le 2\}$$

$$\Gamma_2 = \{y = -1\,,\ -1 \le x \le 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{x = -1\,,\ -1 \le y \le 2\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{y = x^2 + 1\,,\ -1 \le x \le 1\right\}$$

Studiamo f ristretta a Γ_1. Parametrizziamo il segmento tramite

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1\,,\, 2]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = e^{2t}\,, \qquad t \in [-1\,,\, 2]$$

Si trova $g_1'(t) = 2\,e^{2t}$, che non si annulla in $[-1\,,\, 2]$, quindi il massimo e minimo saranno raggiunti sugli estremi dell'intervallo che corrispondono a due degli spigoli.

Studiamo f ristretta a Γ_2. Parametrizziamo il segmento tramite

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1\,,\, 1]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = e^{-t^3-t}\,, \qquad t \in [-1\,,\, 1]$$

Si trova $g_2'(t) = -(3t^2+1)\,e^{-t^3-t}$, che non si annulla in $[-1\,,\, 1]$, quindi il massimo e minimo saranno raggiunti sugli estremi dell'intervallo che corrispondono a due degli spigoli.

Studiamo f ristretta a Γ_3. Parametrizziamo il segmento tramite

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1\,,\, 2]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = e^{-2t}\,, \qquad t \in [-1\,,\, 2]$$

Si trova $g_1'(t) = -2\,e^{-2t}$, che non si annulla in $[-1\,,\, 2]$, quindi il massimo e minimo saranno raggiunti sugli estremi dell'intervallo che corrispondono a due degli spigoli.

Studiamo infine f ristretta a Γ_4.Parametrizziamo Γ_4 tramite

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1\,,\, 1]$$

otteniamo, componendo con f, la funzione di una variabile

$$g_4(t) = f(\gamma_4(t)) = e^{(t^3+t)(t^2+1)}\,, \qquad t \in [-1\,,\, 1]$$

Si trova $g_4'(t) = (5t^4 + 6t^2 + 1)\, e^{t^5+2t^3+t}$, che non si annulla in $[-1\,,\,1]$, quindi il massimo e minimo saranno raggiunti sugli estremi dell'intervallo che corrispondono a due degli spigoli.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque solo quelli relativi al punto critico libero e agli spigoli, dunque

$$f(C) = 1\,, \quad f(Q_1) = e^4\,, \quad f(Q_2) = e^{-2}\,,$$
$$f(Q_3) = e^2\,, \quad f(Q_4) = e^{-4}\,.$$

Per cui su Ω, il minimo di f è e^{-4}, e il massimo è e^4.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{x\,y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le \min\left\{\sqrt{4-x^2}\,,\, 3\sqrt{1+x}\right\}\right\}$.

Osserviamo innanzitutto che l'insieme Ω si riscrive come

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \ge 0\,,\, x^2+y^2 \le 4\,,\, y^2 \le 9(1+x)\right\}$$

e si rappresenta come nella figura 2.

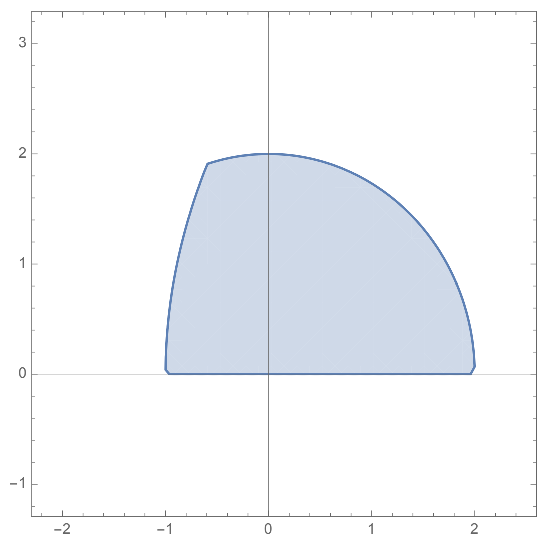

Figure 2: L'insieme Ω.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{x\,y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy = \iint_S \frac{\rho^4\,\cos\theta\,\sin^3\theta}{\rho^5}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \iint_S \cos\theta\,\sin^3\theta\,d\rho\,d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty)\times[-\pi,\pi]\,:\,\rho\sin\theta \geq 0\,,\,\rho^2 \leq 4\,,\,\rho^2\sin^2\theta \leq 9 + 9\rho\cos\theta\right\}$$

La prima e la seconda condizione ci dicono che

$$\rho \leq 2 \quad \text{e} \quad \theta \in [0,\pi]\,,$$

mentre la terza condizione si riscrive come

$$\rho \leq \frac{9\cos\theta + \sqrt{36+45\cos^2\theta}}{2\sin^2\theta}\,.$$

Siamo quindi arrivati a

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty)\times[-\pi,\pi]\,:\,0 \leq \theta \leq \pi\,,\,\rho \leq 2\,,\,\rho \leq \frac{9\cos\theta + \sqrt{36+45\cos^2\theta}}{2\sin^2\theta}\right\}$$

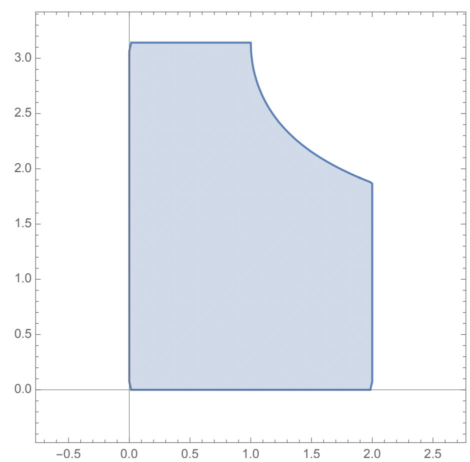

Figure 3: L'insieme S.

L'insieme S è rappresentato nella figura 3 con ρ sulle ordinate e θ sulle ascisse. Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo considerare $\bar\theta \in [0,\pi]$ tale che

$$\frac{9\cos\bar\theta + \sqrt{36+45\cos^2\bar\theta}}{2\sin^2\bar\theta} = 2\,.$$

Possiamo quindi scrivere S come unione di due insiemi semplici, ossia

$$S = \left\{(\rho,\theta)\,:\,0 \leq \theta \leq \bar\theta\,,\,0 \leq \rho \leq 2\right\} \quad \bigcup \quad \left\{(\rho,\theta)\,:\,\bar\theta \leq \theta \leq \pi\,,\,0 \leq \rho \leq \frac{9\cos\theta + \sqrt{36+45\cos^2\theta}}{2\sin^2\theta}\right\}\,.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{x\,y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\;dx\,dy = \iint_S \cos\theta\,\sin^3\theta\;d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\bar\theta}\left(\int_0^2 \cos\theta\,\sin^3\theta\,d\rho\right)d\theta + \int_{\bar\theta}^{\pi}\left(\int_0^{\frac{9\cos\theta+\sqrt{36+45\cos^2\theta}}{2\sin^2\theta}} \cos\theta\,\sin^3\theta\,d\rho\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{\bar\theta} \cos\theta\,\sin^3\theta\,\left(\rho\Big|_0^2\right)\,d\theta + \int_{\bar\theta}^{\pi} \cos\theta\,\sin^3\theta\,\left(\rho\Big|_0^{\frac{9\cos\theta+\sqrt{36+45\cos^2\theta}}{2\sin^2\theta}}\right)\,d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\bar\theta} \cos\theta\,\sin^3\theta\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\bar\theta}^{\pi} \cos\theta\,\sin\theta\,\left(9\cos\theta+\sqrt{36+45\cos^2\theta}\right)d\theta =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}\,\sin^4\theta\right)\Big|_0^{\bar\theta} + \frac{1}{2}\,\left(-\frac{9}{3}\cos^3\theta - \frac{1}{135}\,(36+45\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{\bar\theta}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin^4\bar\theta + \frac{1}{2}\left(3 - \frac{729}{135} + 3\cos^3\bar\theta + \frac{1}{135}\,(36+45\cos^2\bar\theta)^{\frac{3}{2}}\right)\,.$$

Per concludere dobbiamo ricavare il valore di $\sin\bar\theta$ e $\cos\bar\theta$. Possiamo risolvere l'equazione

$$\frac{9\cos\bar\theta+\sqrt{36+45\cos^2\bar\theta}}{2\sin^2\bar\theta} = 2\,,$$

da cui si trova che per $\sin\theta \neq 0$ si ha

$$\sqrt{36+45\cos^2\bar\theta} = 4\sin^2\bar\theta - 9\cos\bar\theta\,.$$

Imponendo che il secondo membro sia maggiore o uguale a 0, eleviamo al quadrato, usiamo l'identità $\cos^2\bar\theta = 1-\sin^2\bar\theta$, si ottiene

$$4\sin^2\bar\theta\left(4\sin^2\bar\theta - 9 - 18\cos\bar\theta\right) = 0\,,$$

da cui, essendo $\sin\theta \neq 0$, troviamo

$$4\cos^2\bar\theta + 18\cos\bar\theta + 5 = 0\,,$$

che ha un'unica soluzione accettabile in $[-1,1]$, ossia

$$\cos\bar\theta = \frac{-9+\sqrt{61}}{4} \qquad \text{e quindi} \qquad \sin^2\bar\theta = 9\;\frac{-7+\sqrt{61}}{8}$$

Osservando la figura 2, si poteva anche dedurre che il punto $P=(x,y)$ di intersezione tra la circonferenza $x^2+y^2=4$ e la parabola $y^2=9(1+x)$, soddisfa $x=2\cos\bar\theta$ e $y=2\sin\bar\theta$. Dunque, risolviamo l'equazione

$$\sqrt{4-x^2} = 3\,\sqrt{1+x}$$

nell'intervallo $[-1,+\infty)$, da cui si ottiene $x=\frac{-9+\sqrt{61}}{2}$, e quindi nuovamente i valori di prima per $\cos\bar\theta$ e $\sin^2\bar\theta$.

Sostituendo nell'espressione trovata prima si ottiene il valore numerico dell'integrale. Osserviamo, al di là degli scopi del compito, che con un po' di pazienza il valore numerico si può scrivere nella forma semplificata

$$\iint_\Omega \frac{x\,y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\;dx\,dy = \frac{3}{320}\Big(-3323+427\sqrt{61}\Big)\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ \log(1+x^2)-y^3-2y^2+\arctan(z^3+2z^2)=0\Big\}$$

i) scrivere, se possibile, l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nei punti:

$$P=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad Q=\begin{pmatrix}\sqrt{e-1}\\-1\\0\end{pmatrix}$$

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione di classe C^1

$$F(x,y,z)=\log(1+x^2)-y^3-2y^2+\arctan(z^3+2z^2)$$

dunque certamente esiste il piano tangente nei punti di Σ in cui non si annulla il gradiente di F. Abbiamo

$$\nabla F(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{2x}{1+x^2}\\[4pt] -3y^2-4y\\[4pt] \frac{3z^2+4z}{1+(z^3+2z^2)^2}\end{pmatrix},$$

e quindi

$$\nabla F(P)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \nabla F(Q)=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{e-1}}{e}\\[4pt] 1\\[4pt] 0\end{pmatrix},$$

Ne segue che il piano tangente a Σ esiste certamente in Q, e la sua equazione cartesiana è

$$\frac{2\sqrt{e-1}}{e}\Big(x-\sqrt{e-1}\Big)+(y+1)=0\,.$$

(*Approfondimento.* La condizione $\nabla F(P)=0$ non implica che necessariamente il piano tangente non esista in P. Il problema andrebbe studiato in maniera più approfondita e va al di là di quello che è richiesto in questo esame. Tuttavia il disegno di Σ in figura 4 suggerisce che in effetti il piano tangente non esista in P.)

ii) determinare, se possibile, una parametrizzazione locale di Σ in un intorno dei punti P,Q del punto precedente.

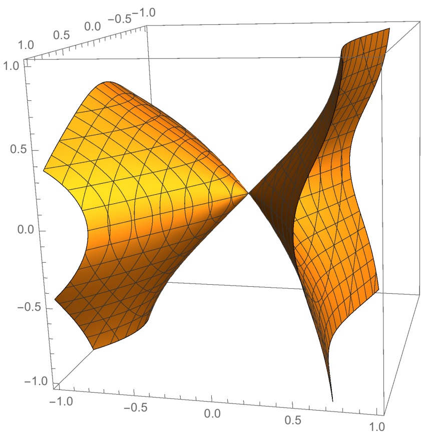

Figure 4: La superficie Σ in un intorno di P.

Per il Teorema delle Funzioni Implicite, siamo certi di poter trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione in un intorno dei punti in cui non si annulla il gradiente di F, dunque nel punto Q.

Nel caso del punto Q, poiché

$$\frac{\partial F}{\partial x}(Q) \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(Q) \neq 0\,,$$

possiamo scegliere se applicare il teorema rispetto alla x o rispetto alla y.

Se scegliamo di applicarlo rispetto alla x, otteniamo che esistono un intorno $U(-1,0)$, un intorno $V(\sqrt{e-1})$ ed una funzione $g(y,z) : U \to V$ tale che $g(-1,0) = \sqrt{e-1}$ e $F(g(y,z),y,z) = 0$ per ogni $(y,z) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione g. Dall'equazione

$$F(g(y,z),y,z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log(1+g(y,z)^2) - y^3 - 2y^2 + \arctan(z^3+2z^2) = 0$$

con la condizione $g(-1,0) = \sqrt{e-1}$, troviamo

$$g(y,z) = \sqrt{e^{y^3+2y^2-\arctan(z^3+2z^2)} - 1}$$

La parametrizzazione locale di Σ è quindi data da

$$\sigma(u,v) = (g(u,v),\, u,\, v)$$

con $(u,v) \in U$, dove

$$g(u,v) = \sqrt{e^{u^3+2u^2-\arctan(v^3+2v^2)} - 1}\,.$$

Se scegliamo di applicare invece il Teorema delle Funzioni Implicite rispetto alla y, otteniamo che esistono un intorno $U(\sqrt{e-1},0)$, un intorno $V(-1)$ ed una funzione $h(x,z) : U \to V$ tale che $h(\sqrt{e-1},0) = -1$ e $F(x,h(x,z),z) = 0$ per ogni $(x,z) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione h. Dall'equazione

$$F(x,h(x,z),z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log(1+x^2) - h(x,z)^3 - 2h(x,z)^2 + \arctan(z^3+2z^2) = 0$$

Non risulta tuttavia agevole in questo caso ottenere l'espressione esplicita della funzione $h(x,z)$.