**Sistemi Dinamici**
**Corso di Laurea in Matematica**
**Test del 18-02-2021**

Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y^3 + y) \\ \dot{y} = -x^2 + \mu^2 - y \end{cases}$$

al variare del parametro $\mu \geq 0$. Studiare in particolare eventuali simmetrie del sistema.

$$\begin{cases} \dot{x} = x\,(y^3+y) \\ \dot{y} = -x^2+\mu^2-y \end{cases}$$

- Punti fissi

$$\begin{cases} x\,(y^3+y) = 0 \\ x^2+y-\mu^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow & x=0 \\ \searrow & y=0 \end{matrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\mu^2 \end{cases} \cup \begin{cases} y=0 \\ x^2=\mu^2 \end{cases}$$

Se $\mu=0$, punti fissi $= \{(0,0)\}$

Se $\mu>0$, punti fissi $= \{(0,\mu^2),\ (\mu,0),\ (-\mu,0)\}$

- Simmetrie

Osserviamo che il sistema ha soluzioni simmetriche rispetto all'asse $y$. Infatti, se $(x(t),y(t))$ è soluzione allora anche $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) := (-x(t),y(t))$ lo è. Basta verificare che

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = -\dot{x}(t) = -x(t)\,(y^3(t)+y(t)) = \tilde{x}(t)\,(\tilde{y}^3(t)+\tilde{y}(t)) \\ \dot{\tilde{y}}(t) = \dot{y}(t) = -x^2(t)+\mu^2-y(t) = -\tilde{x}^2(t)+\mu^2-\tilde{y}(t) \end{cases}$$

- Insiemi invarianti

L'asse $y$ è invariante, infatti ponendo $I(x,y)=x$ si ha che $\frac{d}{dt} I \Big|_{I=0} = \dot{x}\Big|_{x=0} = 0$.

- Orbite periodiche

Consideriamo i due semipiani $\{x>0\}$ e $\{x<0\}$ separatamente.

Su ciascuno di essi la funzione $\rho(x,y) = \frac{1}{x}$ è ben definita e si ha

$$\mathrm{div}(\rho F)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^3+y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-x + \frac{\mu^2-y}{x}\right) = -\frac{1}{x}$$

che ha segno costante su ciascun semipiano.

Poiché le orbite periodiche non possono intersecare l'asse $y$, che è un insieme invariante, concludiamo che le orbite periodiche dovrebbero essere contenute in uno dei due semipiani, e quindi per il criterio di Dulac non possono esistere.

- Per disegnare il ritratto di fase dobbiamo distinguere i casi $\mu = 0$ e $\mu \neq 0$.

$\boxed{\mu = 0}$ $(0,0)$ è l'unico punto fisso.

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} y^3+y & x(3y^2+1) \\ -2x & -1 \end{pmatrix}$$

$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0,0) \text{ non è iperbolico}$$

Consideriamo la funzione $V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2$. Si ha

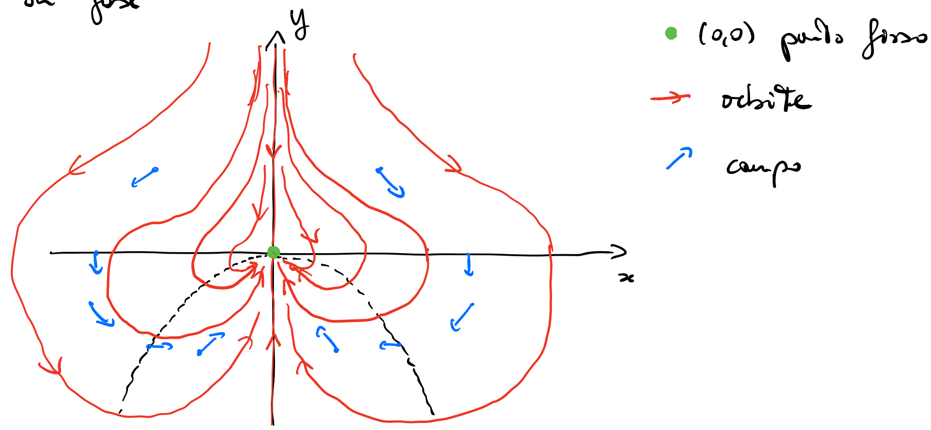
(i) $V(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $V(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

(ii) $\dot{V}(x,y) = x\left(x(y^3+y)\right) + (y^3+y)\left(-x^2-y\right) =$

$$= -y^4 - y^2 \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Quindi $V$ è funzione di Lyapunov per $(0,0)$, che è quindi punto fisso stabile. Dopo diremo qualcosa di più.

Studiando poi il segno del campo, otteniamo il seguente ritratto di fase




Osserviamo che in effetti $(0,0)$ è globalmente asintoticamente stabile. Infatti la funzione di Lyapunov verifica $\{\dot{V}=0\} = \{y=0\}$, e l'unico insieme invariante in $\{y=0\}$ è $(0,0)$. Quindi possiamo applicare il Teorema di Invarianza di La Salle.

$\boxed{\mu > 0}$ I punti fissi sono $(0,\mu^2)$, $(\mu,0)$ e $(-\mu,0)$.

$$JF(0,\mu^2) = \begin{pmatrix} \mu^6+\mu^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$(0,\mu^2)$ è un punto iperbolico di tipo sella. Gli autovettori sono $v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$JF(\mu,0) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -2\mu & -1 \end{pmatrix}$$

$(\mu,0)$ è iperbolico

$\mathrm{Det}\, JF(\mu,0) = 2\mu^2 \qquad \mathrm{Tr}\, JF(\mu,0) = -1$

Quindi se $2\mu^2 < \frac{1}{4}$, $(\mu,0)$ è nodo stabile

se $2\mu^2 = \frac{1}{4}$, $(\mu,0)$ è nodo improprio stabile

(perché ha autovalore $-\frac{1}{2}$ e $\mathrm{rango}(JF(\mu,0) + \frac{1}{2} I) = 1$)

se $2\mu^2 > \frac{1}{4}$ , $(\mu, 0)$ è fuoco stabile

Usando la simmetria del sistema, lo stesso vale per $(-\mu, 0)$.

Studiando il segno del campo otteniamo quindi i seguenti ritratti di fase: