Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 18-02-2020

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \log\left(1+\sqrt{x^4+y^4}\right)$$

i) dire in quali punti del suo dominio naturale è differenziabile;

ii) dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P=(0,0)$ nella direzione $v=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$;

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\le 1\,,\, y\le 1\,,\, 2x+y\ge 0\right\}\,.$$

Esercizio 2. (8 punti) Data la curva (γ, I), con $I=[0,2\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2\,,\qquad \gamma(t)=\left(3\cos t\,,\,2\sin t\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P=(\frac{3}{2},\sqrt{3})$;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ,I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)} \\ \frac{y}{(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie

$$\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^4=1\right\}$$

i) scrivere le equazioni parametrica e cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^4\le 1\,,\, y\ge 0\,,\, 0\le x\le \frac{1}{2}\sqrt{1-z^4}\right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log\left(1 + \sqrt{x^4 + y^4}\right)$$

i) dire in quali punti del suo dominio naturale è differenziabile;

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ si può scrivere come composizione delle funzioni $g(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$ e $h(t) = \log(1+t)$. La funzione h è differenziabile su tutto il suo dominio naturale, mentre g è differenziabile certamente in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x^4 + y^4 = 0\}$, e non sappiamo dai teoremi di carattere generale cosa succede in $\{(0,0)\}$. Dunque possiamo concludere, sempre dai teoremi di carattere generale, che la funzione f è certamente differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Rimane da studiare la differenziabilità di $f(x,y)$ in $(0,0)$. Iniziamo studiando l'esistenza delle derivate parziali di f. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t^2)}{t}$$

e usando lo sviluppo $\log(1+t^2) = t^2 + o(t^2)$, troviamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0\,.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t^2)}{t} = 0\,.$$

Dobbiamo poi vedere se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Sostituendo i valori della funzione e delle sue derivate parziali, si ottiene che dobbiamo studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+\sqrt{x^4+y^4})}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

A questo punto va studiato il limite lungo alcune direzioni. Visto che troveremmo sempre che il limite lungo una direzione ammissibile uguale a 0, proviamo a dimostrare l'esistenza del limite applicando il Teorema del Confronto. Usando la disuguaglianza $\sqrt{a^2+b^2} \le a + b$ valida per ogni $a, b \ge 0$, e applicandola con $a = x^2$ e $b = y^2$, troviamo

$$0 \le \left| \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2} =: g(x,y)$$

Poiché la funzione $g(x,y)$ trovata è definita in un intorno di $(0,0)$, verifica la disuguaglianza vista sopra e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

abbiamo dimostrato che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

quindi la funzione f è differenziabile anche in $(0,0)$.

Concludiamo quindi che la funzione f è differenziabile in tutti i punti del suo dominio naturale $\mathbb{R}^2$.

ii) dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (0,0)$ nella direzione $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$;

Per definizione di derivata direzionale, dobbiamo verificare l'esistenza del limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0 + t\frac{1}{2}, 0 + t\frac{\sqrt{3}}{2}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1 + t^2\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16}})}{t}$$

che, per quanto visto sopra per il logaritmo, esiste ed è uguale a 0.

Più velocemente, avremmo potuto osservare che, essendo la funzione f differenziabile in $(0,0)$ si ha

$$D_v f(0,0) =< \nabla f(0,0), v >$$

e poiché $\nabla f(0,0) = (0,0)$, come abbiamo trovato al punto (i), si ha $D_v f(0,0) = 0$ per ogni v.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \le 1\,,\ y \le 1\,,\ 2x + y \ge 0\right\}\ .$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

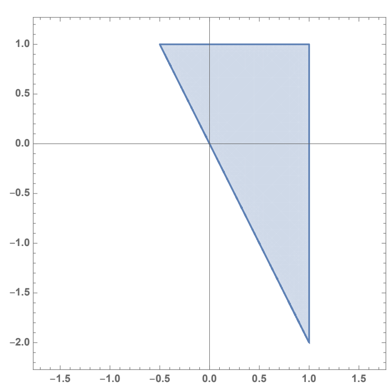

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

Abbiamo visto nel punto (i) che la funzione f è differenziabile nel suo dominio naturale $\mathbb{R}^2$, inoltre per calcolare le derivate parziali possiamo applicare le usuali regole di derivazione su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (sappiamo già che $(0,0)$ è un punto critico libero per f, ma essendo sul bordo di f possiamo non includerlo nella lista dei punti critici liberi e ritrovarlo come punto critico vincolato). Per cercare punti critici liberi interni a Ω cerchiamo dunque le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}\,(1+\sqrt{x^4+y^4})} = 0 \\ \frac{2y^3}{\sqrt{x^4+y^4}\,(1+\sqrt{x^4+y^4})} = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

che sono interne a Ω. Il sistema non ammette soluzioni, quindi non troviamo punti da considerare.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Come spigoli indichiamo i punti

$$S_1 = (1\,,\,1)\ , \qquad S_2 = \left(-\frac{1}{2}\,,\,1\right) \quad \text{e} \quad S_3 = (1\,,\,-2)$$

poiché dividiamo il bordo in tre parti

$$\Gamma_1 = \left\{y = 1\,,\,-\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{y = -2x\,,\,-\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$$

$$\Gamma_3 = \{x = 1\,,\,-2 \leq y \leq 1\}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\,1)\,, \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}\,,\,1\right]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log\left(1 + \sqrt{t^4+1}\right), \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}\,,\,1\right]\ .$$

Si trova $g_1'(t) = t^3\,\frac{2}{\sqrt{t^4+1}(1+\sqrt{t^4+1})}$, che si annulla in $t_0 = 0 \in \left(-\frac{1}{2}\,,\,1\right)$, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_1(0) = (0\,,\,1)\ .$$

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (t\,,\,-2t)\,, \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}\,,\,1\right]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log\left(1 + t^2\sqrt{17}\right), \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}\,,\,1\right]\ .$$

Si trova $g_2'(t) = t\,\frac{2\sqrt{17}}{1+t^2\sqrt{17}}$, che si annulla in $t_0 = 0 \in \left(-\frac{1}{2}\,,\,1\right)$, e identifica quindi il punto critico vincolato
$$Q_2 = \gamma_2(0) = (0\,,\,0)\ .$$
Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione
$$\gamma_3(t) = (1\,,\,t)\,, \qquad t \in [-2\,,\,1]\ ,$$
e componendo con f troviamo la funzione di una variabile
$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = \log\left(1+\sqrt{t^4+1}\right), \qquad t \in [-2\,,\,1]\ .$$
Si trova $g_3'(t) = t^3\,\frac{2}{\sqrt{t^4+1}(1+\sqrt{t^4+1})}$, che si annulla in $t_0 = 0 \in (-2\,,\,1)$, e identifica quindi il punto critico vincolato
$$Q_3 = \gamma_3(0) = (1\,,\,0)\ .$$
I valori che dobbiamo confrontare sono dunque
$$f(S_1) = \log(1+\sqrt{2})\,, \quad f(S_2) = \log\left(1+\sqrt{\frac{17}{16}}\right), \quad f(S_3) = \log\left(1+\sqrt{17}\right)$$
$$f(Q_1) = f(Q_3) = \log 2\,, \quad f(Q_2) = 0\,.$$
Quindi il massimo di f è $\log(1+\sqrt{17})$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione*
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(3\cos t\,,\,2\sin t\right)$$
i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (0, 2\pi)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (0, 2\pi)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema
$$\begin{cases} 3\cos t_0 = \frac{3}{2} \\ 2\sin t_0 = \sqrt{3} \end{cases}$$
Si ottiene facilmente $t_0 = \frac{\pi}{3}$, e quindi la retta tangente al sostegno nel punto P è generata dal vettore velocità
$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -3\sin t_0 \\ 2\cos t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(y - \sqrt{3}\right) = 0\,.$$

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)} \\ \frac{y}{(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

Il dominio naturale del campo $\mathbf{F}$ è $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale, infatti

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{2xy(1+2x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = -\frac{2xy(1+2x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2(1+x^2+y^2)^2}$$

e quindi

$$\text{rot } \mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0$$

Il sostegno Γ della curva è il bordo dell'ellisse di centro $C = (0,0)$ e semiassi $a = 3$ e $b = 2$, quindi è interamente contenuta nel dominio X del campo, ma non è possibile trovare un sottoinsieme $\Omega \subset X$ semplicemente connesso che contenga Γ.

Proviamo quindi a studiare se il campo è conservativo globalmente sul suo dominio naturale. Poiché X non è semplicemente connesso, per verificare se il campo è conservativo, calcoliamo il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una curva chiusa intorno al punto $(0,0)$. Scegliamo quindi la curva

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \left(\cos t\,,\, \sin t\right)$$

e troviamo

$$L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = \int_0^{2\pi} < \mathbf{F}(\tilde{\gamma}(t))\,,\, \tilde{\gamma}'(t) > \, dt = \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{2} \\ \frac{\sin t}{2} \end{pmatrix} \,,\, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} > \, dt = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è conservativo su X. Poiché la curva (γ, I) è chiusa, vale $L(\mathbf{F}, \gamma) = 0$.

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^4 = 1\right\}$$

i) scrivere le equazioni parametrica e cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

Possiamo considerare Σ come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^4$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z^3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \nabla F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{2}\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0\,.$$

Per scrivere l'equazione parametrica possiamo usare l'equazione cartesiana o introdurre una parametrizzazione di Σ. Dall'equazione cartesiana si trova che due vettori linearmente indipendenti e tangenti a Σ in P sono

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

quindi l'equazione parametrica del piano tangente a Σ in P è

$$\begin{cases} x(s,t) = \frac{\sqrt{3}}{2} - t\sqrt{2} \\ y(s,t) = s \\ z(s,t) = \frac{\sqrt{2}}{2} + t\sqrt{3} \end{cases}$$

ii) calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^4 \leq 1\,,\, y \geq 0\,,\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\sqrt{1 - z^4}\right\}$$

L'insieme V è un solido di rotazione intorno all'asse z, dove a ruotare è il grafico della funzione $g(z) = \sqrt{1 - z^4}$ per $z \in [-1, 1]$. Dunque V si scrive come

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -1 \leq z \leq 1\,,\, x^2 + y^2 \leq g^2(z)\,,\, y \geq 0\,,\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\,g(z)\right\}$$

e usiamo l'integrazione per strati con

$$V_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq g^2(z)\,,\, y \geq 0\,,\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\,g(z)\right\}$$

Dunque

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V 1\,dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{V_z} 1\,dxdy\right) dz$$

Calcoliamo prima l'integrale doppio su V_z usando le coordinate polari

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Si trova che

$$\iint_{V_z} 1\, dxdy = \iint_{S_z} \rho\, d\rho d\theta$$

dove

$$S_z = \left\{ (\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \,:\, \rho^2 \leq g^2(z)\,,\, \rho \sin\theta \geq 0\,,\, \rho\cos\theta \geq 0\,,\, \rho\cos\theta \leq \frac{1}{2}\, g(z) \right\}$$

Dalla prima condizione si ottiene $\rho \in [0, g(z)]$, e dalla seconda e dalla terza si ottiene $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Inoltre la quarta condizione si riscrive come $\rho \leq \frac{g(z)}{2\cos\theta}$. Visto che $g(z) \geq \frac{g(z)}{2\cos\theta}$ per $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$, si trova che

$$S_z = \left\{ (\rho, \theta) \,:\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\,,\, 0 \leq \rho \leq \frac{g(z)}{2\cos\theta} \right\} \quad \bigcup \quad \left\{ (\rho, \theta) \,:\, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\, 0 \leq \rho \leq g(z) \right\}$$

e quindi

$$\iint_{V_z} 1\, dxdy = \iint_{S_z} \rho\, d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{\frac{g(z)}{2\cos\theta}} \rho\, d\rho \right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{g(z)} \rho\, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(g(z))^2}{8\, \cos^2\theta}\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(g(z))^2}{2}\, d\theta =$$

$$= (g(z))^2 \left(\frac{1}{8}\, \tan\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + (g(z))^2 \left(\frac{1}{2}\, \theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = (g(z))^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12} \right).$$

Concludiamo quindi che

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V 1\, dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{V_z} 1\, dxdy \right) dz = \int_{-1}^{1} (g(z))^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12} \right) dz =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12} \right) \int_{-1}^{1} (1 - z^4)\, dz = \frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{15}\,.$$