

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Prova parziale del 18-12-2018

Esercizio 1. (12 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\mu - r^2) - y(\mu + r^2) \\ \dot{y} = y(\mu + \varepsilon\mu - r^2) + x(\mu + r^2) \end{cases}$$

dove $r^2 = x^2 + y^2$, e μ ed ε sono parametri reali.

- (i) Ponendo $\varepsilon = 0$, studiare le biforcazioni locali presenti nel sistema.
- (ii) Dimostrare che in un intorno di $(0, 0)$ si ha lo stesso comportamento nel caso $\varepsilon = 1$.

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -2x + 6\mu x^5 \tag{*}$$

con $x \in \mathbb{R}$ e per valori reali del parametro μ .

- (i) Scrivere la funzione hamiltoniana e lagrangiana del sistema.
- (ii) Rappresentare il ritratto di fase dell'equazione (*) nello spazio delle fasi per $\mu = \frac{1}{3}$.
- (iii) Determinare i valori di $\mu \in \mathbb{R}$ per cui, per ogni $v_0 \in \mathbb{R}$, la soluzione di (*) con condizione iniziale $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ soddisfa $\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| < +\infty$.

Esercizio 3. (12 punti) Dato l'intervallo $[0, 1]$, si consideri la partizione $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ con $J_1 = [0, \frac{1}{4}]$, $J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $J_4 = [\frac{3}{4}, 1]$, e la funzione $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in J_1 \\ x + \frac{1}{4}, & x \in J_2 \\ \frac{7}{4} - 2x, & x \in J_3 \\ 3x - 2, & x \in J_4 \end{cases}$$

- (i) Costruire l' f -grafo di \mathcal{J} .
- (ii) Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste un'orbita periodica di f di periodo n .
- (iii) Costruire un ferro di cavallo per un'opportuna iterata di f .

Svolgimento

Esercizio 1. *Si consideri il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\mu - r^2) - y(\mu + r^2) \\ \dot{y} = y(\mu + \varepsilon \mu - r^2) + x(\mu + r^2) \end{cases}$$

dove $r^2 = x^2 + y^2$, e μ ed ε sono parametri reali.

(i) Ponendo $\varepsilon = 0$, studiare le biforcazioni locali presenti nel sistema.

Cerchiamo innanzitutto i punti fissi al variare di μ . Il sistema

$$\begin{cases} x(\mu - r^2) - y(\mu + r^2) = 0 \\ y(\mu - r^2) + x(\mu + r^2) = 0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione $(x, y) = (0, 0)$, e dunque l'origine è l'unico punto fisso. Linearizzando il campo di vettori nel punto $(0, 0)$ si ottiene

$$JF(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -\mu \\ \mu & \mu \end{pmatrix}$$

matrice con autovalori $\lambda_{\pm} = \mu(1 \pm i)$. Dunque l'origine è un punto fisso iperbolico per ogni $\mu \neq 0$, ed è un fuoco stabile per $\mu < 0$ e un fuoco instabile per $\mu > 0$. Si tratta quindi di studiare la biforcazione per $\mu = 0$.

Passando a coordinate polari (r, θ) si ottiene

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = r^2 + \mu \end{cases}$$

quindi:

per $\mu < 0$, \dot{r} è negativo per ogni $r > 0$, e quindi l'origine è globalmente asintoticamente stabile; per $\mu > 0$, $\dot{r} = 0$ per $r = 0$ e $r = \sqrt{\mu}$, dunque $\{x^2 + y^2 = \mu\}$ è un insieme invariante, su cui $\dot{\theta} > 0$, quindi si tratta di un'orbita periodica (si può anche stabilire che è attrattiva).

Abbiamo quindi ottenuto che per $\mu = 0$ si ha una biforcazione di Hopf in $(0, 0)$.

(ii) Dimostrare che in un intorno di $(0, 0)$ si ha lo stesso comportamento nel caso $\varepsilon = 1$.

Dobbiamo mostrare che continua ad esserci una biforcazione di Hopf in $(0, 0)$. Linearizzando il campo di vettori nel punto $(0, 0)$ si ottiene

$$JF(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -\mu \\ \mu & 2\mu \end{pmatrix}$$

matrice con autovalori $\lambda_{\pm} = \frac{\mu}{2}(3 \pm i\sqrt{3})$. Dunque l'origine è un punto fisso iperbolico per ogni $\mu \neq 0$, ed è un fuoco stabile per $\mu < 0$ e un fuoco instabile per $\mu > 0$. La biforcazione avviene quindi ancora per $\mu = 0$.

Passando a coordinate polari (r, θ) si ottiene

$$\begin{cases} \dot{r} = r [\mu(\sin^2 \theta + 1) - r^2] \\ \dot{\theta} = r^2 + \mu(\cos \theta \sin \theta + 1) \end{cases}$$

Notiamo che:

per $\mu < 0$ si ha $\dot{r} < 0$, e quindi come prima non possono esserci orbite periodiche; per $\mu > 0$, si ha che $\dot{r} > 0$ per $0 < r < \sqrt{\mu(\sin^2 \theta + 1)}$ e che $\dot{r} < 0$ per $r > \sqrt{\mu(\sin^2 \theta + 1)}$. Inoltre,

$$\sqrt{\mu} \leq \sqrt{\mu(\sin^2 \theta + 1)} \leq \sqrt{2\mu}.$$

Notiamo che, fuori dall'origine, per $\mu \geq 0$ si ha che $\dot{\theta} > 0$ e per $\mu \leq 0$ si ha che $\dot{r} < 0$ il che implica che l'unico punto fisso è l'origine. Quindi si può applicare il Teorema di Poincaré-Bendixson nella regione

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mu \leq x^2 + y^2 \leq 2\mu\}$$

dimostrando l'esistenza di un'orbita periodica per $\mu > 0$.

Quindi si ottiene ancora che per $\mu = 0$ si ha una biforcazione di Hopf in $(0, 0)$.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -2x + 6\mu x^5 \quad (\star)$$

con $x \in \mathbb{R}$ e per valori reali del parametro μ .

(i) Scrivere la funzione hamiltoniana e lagrangiana del sistema.

L'equazione differenziale è della forma $\ddot{x} = -V'_\mu(x)$ con $V_\mu(x) = x^2 - \mu x^6$. Si tratta quindi di un sistema dinamico che descrive il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza conservativa con energia potenziale V_μ . Dunque

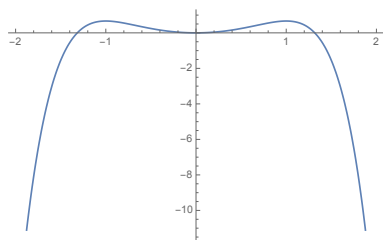
$$H(p, x) = \frac{1}{2} p^2 + x^2 - \mu x^6 \quad \text{e} \quad L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - x^2 + \mu x^6$$

(ii) Rappresentare il ritratto di fase dell'equazione (\star) nello spazio delle fasi per $\mu = \frac{1}{3}$.

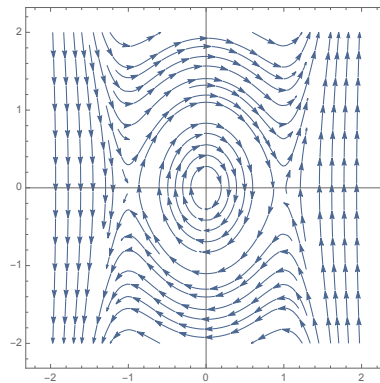
I punti fissi del sistema sono i punti della forma $(x, p) = (x, 0)$ con $V'_{\frac{1}{3}}(x) = 0$. Dunque cerchiamo le soluzioni di

$$V'_{\frac{1}{3}}(x) = -2x + 2x^5 = 0$$

che sono $x = 0$ e $x = \pm 1$. Il punto $x = 0$ è un punto di minimo locale, mentre i punti $x = \pm 1$ sono punti di massimo locale per $V_{\frac{1}{3}}$. Ne segue che $(0, 0)$ è un punto fisso stabile per il sistema di tipo centro, mentre $(\pm 1, 0)$ sono punti fissi instabili di tipo sella. Inoltre $V_{\frac{1}{3}}(-1) = V_{\frac{1}{3}}(+1)$, e quindi i punti fissi $(\pm 1, 0)$ sono sullo stesso insieme di livello dell'hamiltoniana, e lo stesso vale dunque per le loro varietà stabili e instabili. Il grafico di $V_{\frac{1}{3}}$ è in figura 1a, e si ricava il ritratto di fase in figura 1b.



(a) Il grafico di V_μ per $\mu = \frac{1}{3}$.



(b) Ritratto di fase per $\mu = \frac{1}{3}$.

(iii) Determinare i valori di $\mu \in \mathbb{R}$ per cui, per ogni $v_0 \in \mathbb{R}$, la soluzione di (\star) con condizione iniziale $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ soddisfa $\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| < +\infty$.

Studiando il grafico dell'energia potenziale al variare di μ , otteniamo che:

per $\mu \leq 0$, V_μ assume valori non negativi, ha un solo punto critico, $x = 0$, che è punto di minimo assoluto, e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V_\mu(x) = +\infty$;

per $\mu > 0$, V_μ ha tre punti critici, $x = 0$ e $x = \pm(3\mu)^{-\frac{1}{4}}$, e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V_\mu(x) = -\infty$.

In particolare, per la soluzione $x(t)$ di (\star) con $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, che corrisponde alla soluzione $(x(t), p(t))$ del sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = -2x + 6\mu x^5 \\ x(0) = 0, p(0) = v_0 \end{cases}$$

si ha:

per $\mu \leq 0$, per ogni $v_0 \in \mathbb{R}$ si ha $\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| < +\infty$, infatti da

$$H(p(t), x(t)) = \frac{1}{2} p^2(t) + V(x(t)) = H(v_0, 0) = \frac{1}{2} v_0^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

si ricava $V(x(t)) = \frac{1}{2} (v_0^2 - p^2(t)) \geq 0$, e dunque V è limitato lungo la soluzione e $\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| < +\infty$ (poiché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V_\mu(x) = +\infty$);

per $\mu > 0$, si mostra che se

$$H(v_0, 0) = \frac{1}{2} v_0^2 > H(0, \pm(3\mu)^{-\frac{1}{4}}) = V((3\mu)^{-\frac{1}{4}})$$

allora $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |x(t)| = +\infty$ (come esempio, guardare il ritratto di fase per $\mu = \frac{1}{3}$).

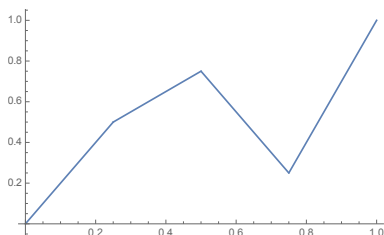
Esercizio 3. Dato l'intervallo $[0, 1]$, si consideri la partizione $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ con $J_1 =$

$[0, \frac{1}{4}]$, $J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $J_4 = [\frac{3}{4}, 1]$, e la funzione $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da

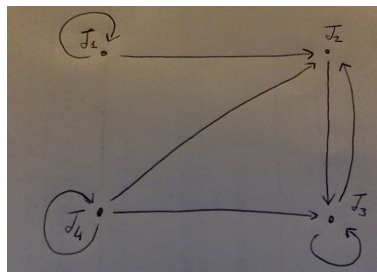
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in J_1 \\ x + \frac{1}{4}, & x \in J_2 \\ \frac{7}{4} - 2x, & x \in J_3 \\ 3x - 2, & x \in J_4 \end{cases}$$

(i) Costruire l' f -grafo di \mathcal{J} .

La funzione f ha il grafico in figura 2a, da cui si ricava che l' f -grafo di \mathcal{J} è quello in figura 2b.



(a) Il grafico di f .



(b) L' f -grafo.

(ii) Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste un'orbita periodica di f di periodo n .

Usando l' f grafo, otteniamo che il cammino $J_2 J_3 J_3 J_2$ è ammissibile, quindi esiste in J_2 un punto fisso di f^3 , che non è fisso per f . Ne segue che f ammette un'orbita periodica di periodo 3, e per il Teorema di Sharkovskii abbiamo che f ha orbite periodiche per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Costruire un ferro di cavallo per un'opportuna iterata di f .

Mostriamo che f^2 ha un ferro di cavallo. Sia $z \in J_3$ un punto fisso per f (che esiste perché J_3 ricopre sé stesso), e $y \in J_2$ tale che $f(y) = z$. Scelto $J = [y, z]$ mostriamo che esistono $K_1, K_2 \subset J$ disgiunti e tali che $f^2(K_1) = f^2(K_2) = J$.

Per costruzione $f^2(y) = f^2(z) = z$, e il punto $\frac{1}{2}$ soddisfa $\frac{1}{2} \in (y, z)$ e $f^2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} < y$. Dunque esistono due punti x_1, x_2 tali che $y < x_1 < \frac{1}{2} < x_2 < z$ e $f^2(x_1) = f^2(x_2) = y$. Quindi scegliamo $K_1 = [y, x_1]$ e $K_2 = [x_2, z]$.