

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 17-09-2026

Esercizio 1. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu y e^x \\ \dot{y} = x^2 - x \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. (10 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y^3 \\ \dot{y} = (x+1)(x-1) \end{cases}$$

- (a) disegnare il ritratto di fase;
- (b) indicando con $(x(t, (x_0, y_0)), y(t, (x_0, y_0)))$ l'orbita del punto (x_0, y_0) , e con $T(x_0, y_0)$ il tempo massimo positivo di esistenza della soluzione (non va calcolato, si può immaginare che sia $+\infty$), calcolare x^* tale che

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0, 0)} y(t, (x_0, 0)) = +\infty$$

per ogni $x_0 \in (-\infty, x^*)$. E poi determinare, se esiste, $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0, 0)} \frac{y(t, (x_0, 0))}{x(t, (x_0, 0))^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

per ogni $x_0 \in (-\infty, x^*)$.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la famiglia di funzioni continue $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 4x, & x \in J_1 = [0, \frac{1}{4}] \\ 1 - \lambda(x - \frac{1}{4}), & x \in J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 1 + \lambda(x - \frac{3}{4}), & x \in J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 4(1-x), & x \in J_4 = [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in (0, 4]$.

- (a) Determinare esistenza e stabilità dei punti fissi al variare di λ .
- (b) Dire per quali valori di $\lambda \in (0, 4]$ esistono punti periodici di periodo minimo 2. Determinare se ne possono esistere di attrattivi per qualche valore di $\lambda \in (0, 4]$.
- (c) Discutere il comportamento caotico di f_λ al variare di λ .

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu y e^x \\ \dot{y} = x^2 - x \end{cases}$$

Studio dei punti fissi

I punti fissi del sistema soddisfano

$$\begin{cases} \mu y e^x = 0, \\ x^2 - x = 0. \end{cases}$$

Distinguiamo i casi $\mu \neq 0$ e $\mu = 0$.

Caso $\mu \neq 0$.

Dalla prima equazione segue $y = 0$, mentre la seconda implica $x = 0$ oppure $x = 1$. I punti fissi sono quindi

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (1, 0).$$

La matrice jacobiana associata al sistema è

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} \mu y e^x & \mu e^x \\ 2x - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$JF(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza,

$$\text{Tr } J(P_0) = 0, \quad \det J(P_0) = \mu.$$

Se $\mu < 0$, allora

$$\det J(P_0) < 0,$$

e quindi P_0 è un *punto iperbolico di tipo sella*.

Se $\mu > 0$, il punto P_0 è dunque *non iperbolico di tipo centro*.

Si ha

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & \mu e \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza,

$$\text{Tr } J(P_1) = 0, \quad \det J(P_1) = -\mu e.$$

Se $\mu > 0$, allora

$$\det J(P_1) < 0,$$

e quindi P_1 è un *punto iperbolico di tipo sella*.

Se $\mu < 0$, il punto P_1 è dunque *non iperbolico di tipo centro*.

Caso $\mu = 0$.

Per $\mu = 0$ il sistema si riduce a

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = x(x - 1). \end{cases}$$

La condizione di equilibrio è quindi $x(x-1) = 0$, mentre y è arbitrario. L'insieme dei punti fissi è

$$\mathcal{E} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Tutti i punti fissi per $\mu = 0$ sono quindi non iperbolici e la linearizzazione non permette di stabilirne la natura.

Rette invarianti

Studiamo dapprima l'esistenza di rette invarianti del tipo $x = c$ e $y = c$. Successivamente consideriamo le rette oblique come insiemi di livello di una funzione lineare.

Rette parallele agli assi.

Consideriamo la funzione

$$I(x, y) = x.$$

L'insieme di livello $\{I = c\} = \{x = c\}$ è invariante se $\dot{I} = \dot{x} = 0$ su $\{x = c\}$. Sulla retta $x = c$ si ha

$$\dot{I} = \mu y e^c.$$

Affinché questa quantità sia nulla per ogni $y \in \mathbb{R}$, deve essere $\mu = 0$. Dunque, se $\mu \neq 0$, non esistono rette invarianti del tipo $x = c$, mentre, se $\mu = 0$, tutte le rette verticali

$$x = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

sono invarianti.

Consideriamo poi la funzione

$$I(x, y) = y.$$

L'insieme di livello $\{I = c\} = \{y = c\}$ è invariante se $\dot{I} = \dot{y} = 0$ su $\{y = c\}$. Sulla retta $y = c$ si ha

$$\dot{I} = x^2 - x = x(x-1),$$

che non è identicamente nullo. Pertanto non esistono rette invarianti del tipo $y = c$, per nessun valore di μ .

Rette oblique.

Consideriamo ora la funzione

$$I(x, y) = ax + by, \quad a, b \neq 0,$$

e cerchiamo $c \in \mathbb{R}$ tale che l'insieme di livello

$$\{I = c\} = \{ax + by = c\}$$

sia invariante.

Affinché $\{I = c\}$ sia invariante deve valere

$$\dot{I}(x, y) = 0 \quad \text{su } \{I = c\}.$$

Calcolando la derivata di I lungo le soluzioni del sistema, otteniamo

$$\dot{I} = a\dot{x} + b\dot{y} = a\mu y e^x + b(x^2 - x).$$

Sull'insieme di livello $\{I = c\}$ si ha

$$ax + by = c.$$

Poiché $b \neq 0$, possiamo scrivere

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Pertanto,

$$\dot{I}\Big|_{\{I=c\}} = \frac{a\mu}{b}(c - ax)e^x + b(x^2 - x).$$

La retta $\{I = c\}$ è dunque invariante se e solo se

$$\frac{a\mu}{b}(c - ax)e^x + b(x^2 - x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

L'identità non può essere verificata, pertanto non esistono rette oblique invarianti.

Simmetrie

Studiamo la simmetria rispetto all'asse x . A tale scopo consideriamo l'applicazione

$$S(x, y) = (x, -y).$$

Si ha

$$F(S(x, y)) = F(x, -y) = \left(\frac{-\mu y e^x}{x^2 - x} \right) = -JS(F(x, y)) = - \left(\frac{\mu y e^x}{-(x^2 - x)} \right).$$

Pertanto se $(x(t), y(t))$ è una soluzione, allora per ogni $\mu \in \mathbb{R}$ anche $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (x(-t), -y(-t))$ è una soluzione. Il ritratto di fase è dunque simmetrico rispetto all'asse x , con inversione del verso di percorrenza delle orbite.

Orbite periodiche

Rimane da capire il comportamento del sistema nell'intorno dei punti di tipo centro per $\mu \neq 0$. Usiamo il metodo delle isocline. Fuori dall'asse x , possiamo scrivere

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - x}{\mu y e^x}.$$

Separando le variabili, otteniamo

$$\mu y dy = (x^2 - x)e^{-x} dx.$$

Integrando,

$$\frac{\mu}{2}y^2 = \int (x^2 - x)e^{-x} dx = -(x^2 + x + 1)e^{-x} + c.$$

Pertanto le orbite sono contenute negli insiemi di livello della funzione

$$I_\mu(x, y) = \frac{\mu}{2}y^2 + (x^2 + x + 1)e^{-x}.$$

Verifichiamo che I_μ sia effettivamente un integrale primo. Si ha

$$\dot{I}_\mu(x, y) = \frac{\partial I_\mu}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial I_\mu}{\partial y} \dot{y} = -x(x - 1)e^{-x} \mu y e^x + \mu y x(x - 1) = 0.$$

Gli insiemi di livello $\{I_\mu = c\}$ sono quindi invarianti.

Calcoliamo ora i punti critici di I_μ . Essi soddisfano

$$\nabla I_\mu(x, y) = 0,$$

ossia

$$\begin{cases} -x(x-1)e^{-x} = 0, \\ \mu y = 0. \end{cases}$$

Poiché $\mu \neq 0$ ed $e^{-x} > 0$, ritroviamo i due punti

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (1, 0).$$

La matrice hessiana di I_μ è

$$D^2 I_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} (x^2 - 3x + 1)e^{-x} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Se $\mu > 0$, abbiamo un punto di tipo centro in $P_0 = (0, 0)$. Si ha $I_\mu(P_0) = 1$ e

$$D^2 I_\mu(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice $D^2 I_\mu(P_0)$ è definita positiva. Pertanto P_0 è un minimo locale stretto di I_μ .

Ne segue che, per $c > 1$ sufficientemente vicino a 1, la componente dell'insieme di livello

$$\{I_\mu = c\}$$

che circonda P_0 è una curva semplice e chiusa. Tale curva è invariante e non contiene punti fissi; essa è quindi un'orbita periodica.

Se $\mu < 0$, abbiamo un punto di tipo centro in $P_1 = (1, 0)$. Si ha $I_\mu(P_1) = \frac{3}{e}$ e

$$D^2 I_\mu(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice $D^2 I_\mu(P_1)$ è definita negativa. Pertanto P_1 è un massimo locale stretto di I_μ .

Ne segue che, per $c < 3/e$ sufficientemente vicino a $3/e$, la componente dell'insieme di livello

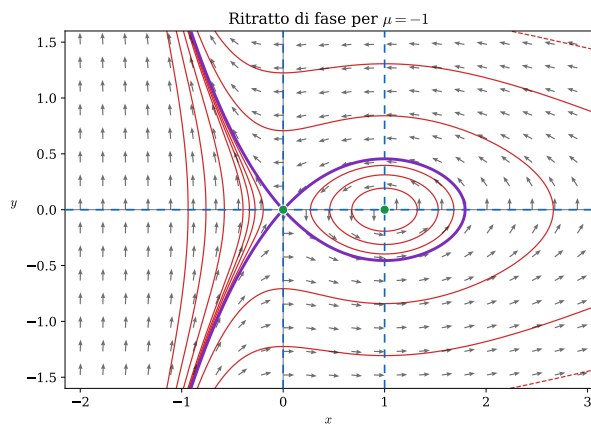
$$\{I_\mu = c\}$$

che circonda P_1 è una curva semplice e chiusa. Tale curva è invariante e non contiene punti fissi; essa è quindi un'orbita periodica.

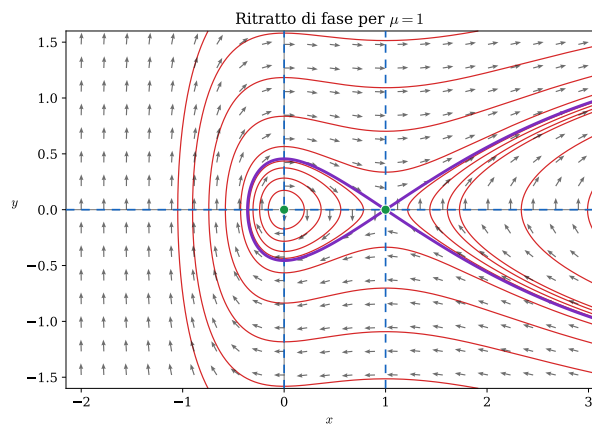
Possiamo quindi concludere che per ogni $\mu \neq 0$ il sistema ammette orbite periodiche intorno ai punti di tipo centro.

Ritratti di fase

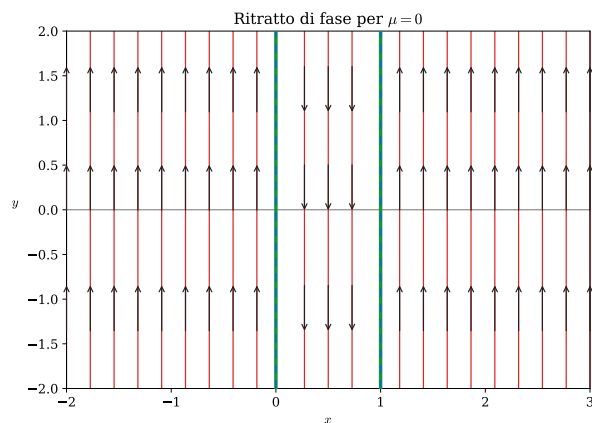
Usiamo le informazioni ottenute e la direzione del campo di vettori, per disegnare i ritratti di fase.



(a) $\mu = -1$



(b) $\mu = 1$



(c) $\mu = 0$

Figure 1: Ritratti di fase per valori significativi del parametro μ . Le orbite sono rappresentate in rosso, le varietà stabile e instabile delle selle in viola, i punti fissi in verde e le linee in cui si annullano le componenti del campo di vettori in blu tratteggiato.

Esercizio 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y^3 \\ \dot{y} = (x+1)(x-1) \end{cases}$$

(a). Mostriamo che si tratta di un sistema hamiltoniano. Dobbiamo trovare una funzione $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 4y^3, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = x^2 - 1. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava

$$H(x, y) = y^4 + W(x),$$

dove W è una funzione della sola variabile x . Sostituendo nella seconda equazione si ottiene

$$W'(x) = 1 - x^2,$$

da cui, una possibile scelta è

$$W(x) = x - \frac{x^3}{3}.$$

I punti fissi del sistema sono

$$P_1 = (-1, 0), \quad P_2 = (1, 0).$$

Inoltre, il grafico dell'energia potenziale W è in figura 2, in cui osserviamo che

$$W(-1) = -\frac{2}{3}, \quad W(1) = \frac{2}{3}.$$

Pertanto, il punto $x = -1$ è un punto di minimo locale stretto di W , e quindi

$$P_1 = (-1, 0)$$

è un punto di tipo centro. Mentre $x = 1$ è un punto di massimo locale stretto di W , e quindi

$$P_2 = (1, 0)$$

è un punto di tipo sella.

Gli insiemi di livello dell'hamiltoniana sono invarianti. In particolare, le varietà stabile e instabile di P_2 sono contenute nell'insieme di livello

$$H(x, y) = H(P_2).$$

Poiché

$$H(P_2) = H(1, 0) = W(1) = \frac{2}{3},$$

si ha

$$W^{s,u}(P_2) \subseteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 + x - \frac{x^3}{3} = \frac{2}{3} \right\}.$$

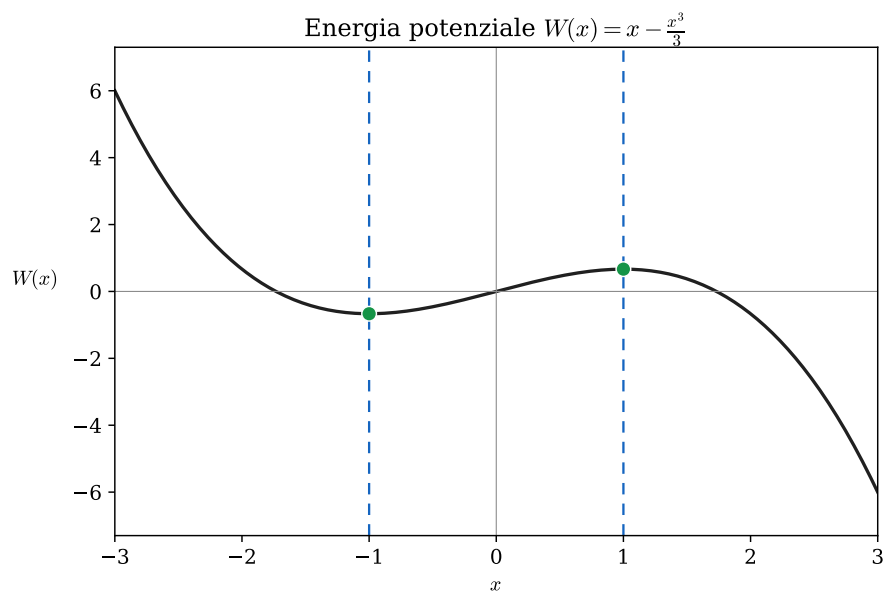


Figure 2: Grafico dell'energia potenziale $W(x) = x - \frac{x^3}{3}$.

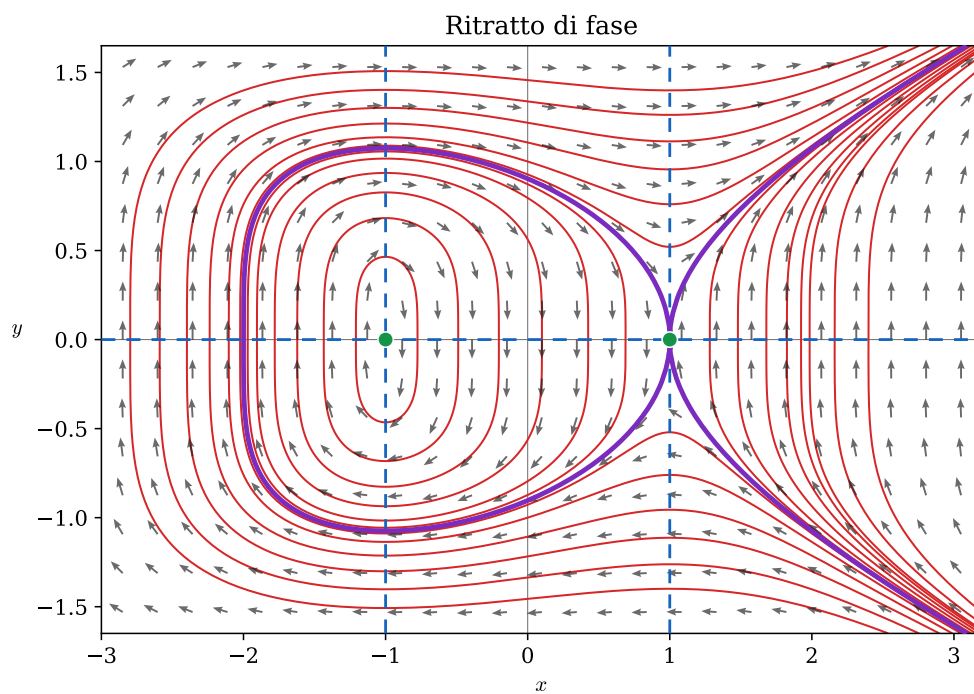


Figure 3: Ritratto di fase del sistema.

Le orbite periodiche si trovano soltanto intorno al centro P_1 e sono racchiuse dall'orbita omoclina a P_2 . Utilizzando gli insiemi di livello di H e il segno del campo si ottiene il ritratto di fase in figura 3.

(b). Dal ritratto di fase si osserva che le orbite che partono da un punto $(x_0, 0)$, con x_0 sufficientemente negativo, percorrono il ramo superiore di un insieme di livello illimitato e soddisfano

$$x(t, (x_0, 0)) \longrightarrow +\infty, \quad y(t, (x_0, 0)) \longrightarrow +\infty$$

per $t \rightarrow T(x_0, 0)$.

Il valore limite x^* è determinato dall'intersezione con l'asse x dell'orbita omoclina associata alla sella

$$P_2 = (1, 0).$$

Tale orbita è contenuta nell'insieme di livello

$$H(x, y) = H(P_2) = \frac{2}{3}.$$

Ponendo $y = 0$, dobbiamo quindi risolvere

$$W(x) = \frac{2}{3},$$

ossia

$$x - \frac{x^3}{3} = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Poiché $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$, le soluzioni sono

$$x = 1, \quad x = -2.$$

La soluzione $x = 1$ corrisponde alla sella P_2 , mentre l'altra intersezione dell'orbita omoclina con l'asse x è $x = -2$. Pertanto

$$\boxed{x^* = -2.}$$

Cerchiamo ora $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0, 0)} \frac{y(t, (x_0, 0))}{x(t, (x_0, 0))^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sull'orbita passante per $(x_0, 0)$, la conservazione dell'hamiltoniana fornisce

$$H(x(t), y(t)) = H(x_0, 0) = W(x_0).$$

Pertanto

$$y(t)^4 + x(t) - \frac{x(t)^3}{3} = W(x_0).$$

Poiché, per $x_0 < -2$,

$$x(t) \longrightarrow +\infty$$

e $y(t) > 0$ per $t > 0$, possiamo scrivere

$$y(t) = \left(\frac{x(t)^3}{3} - x(t) + W(x_0) \right)^{1/4} = x(t)^{3/4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x(t)^2} + \frac{W(x_0)}{x(t)^3} \right)^{1/4}.$$

Di conseguenza,

$$\frac{y(t)}{x(t)^\alpha} = x(t)^{\frac{3}{4}-\alpha} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x(t)^2} + \frac{W(x_0)}{x(t)^3} \right)^{1/4}.$$

Affinché il limite sia finito e diverso da zero deve essere

$$\frac{3}{4} - \alpha = 0.$$

Pertanto

$$\boxed{\alpha = \frac{3}{4}}.$$

Per tale valore si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0, 0)} \frac{y(t, (x_0, 0))}{x(t, (x_0, 0))^{3/4}} = \lim_{t \rightarrow T(x_0, 0)} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x(t, (x_0, 0))^2} + \frac{W(x_0)}{x(t, (x_0, 0))^3} \right)^{1/4} = \left(\frac{1}{3} \right)^{1/4}.$$

Quindi, per ogni $x_0 \in (-\infty, x^*)$,

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow T(x_0, 0)} \frac{y(t, (x_0, 0))}{x(t, (x_0, 0))^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}}.$$

Esercizio 3.

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 4x, & x \in J_1 = [0, \frac{1}{4}] \\ 1 - \lambda(x - \frac{1}{4}), & x \in J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 1 + \lambda(x - \frac{3}{4}), & x \in J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 4(1-x), & x \in J_4 = [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Disegniamo innanzitutto il grafico di f_λ per alcuni valori significativi del parametro. Nella figura sono rappresentati i casi $\lambda = 1, 2, 3, 4$, insieme alla diagonale $y = x$.

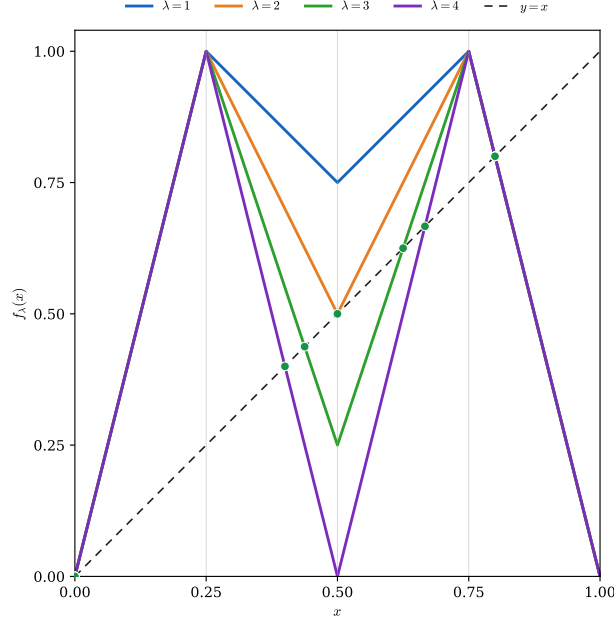


Figure 4: Grafici di f_λ per $\lambda = 1, 2, 3, 4$. La retta tratteggiata è la diagonale $y = x$; i punti verdi sono i punti fissi.

(a). Punti fissi in J_1 . Si ha

$$f_\lambda(x) = x \iff 4x = x \iff x = 0.$$

Quindi $x_1 = 0$ è un punto fisso per ogni $\lambda \in (0, 4]$.

In J_1 si ha $f'_\lambda(x) = 4$, e dunque x_1 è un punto fisso repulsivo per ogni $\lambda \in (0, 4]$.

Punti fissi in J_2 . L'equazione dei punti fissi diventa

$$1 - \lambda \left(x - \frac{1}{4} \right) = x,$$

e si ottiene quindi

$$x_2(\lambda) = \frac{4 + \lambda}{4(1 + \lambda)}.$$

Dobbiamo determinare per quali valori di λ risulta

$$x_2(\lambda) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right].$$

La disuguaglianza

$$\frac{4 + \lambda}{4(1 + \lambda)} \geq \frac{1}{4}$$

è sempre verificata, mentre

$$\frac{4 + \lambda}{4(1 + \lambda)} \leq \frac{1}{2} \iff \lambda \geq 2.$$

Pertanto $x_2(\lambda)$ è un punto fisso se e solo se $\lambda \in [2, 4]$.

Per $\lambda > 2$, il punto $x_2(\lambda)$ appartiene all'interno di J_2 e $|f'_\lambda(p_2(\lambda))| = \lambda > 2$, per cui $x_2(\lambda)$ è repulsivo.

Per $\lambda = 2$, si ha $x_2(2) = \frac{1}{2}$ e f_2 non è derivabile in $\frac{1}{2}$. Tuttavia, dal grafico si deduce che $x_2(\lambda)$ è repulsivo anche in questo caso.

Punti fissi in J_3 . L'equazione dei punti fissi è

$$1 + \lambda \left(x - \frac{3}{4} \right) = x,$$

e si ottiene

$$x_3(\lambda) = \frac{3\lambda - 4}{4(\lambda - 1)},$$

per $\lambda \neq 1$. Per $\lambda = 1$, non ci sono soluzioni. Imponendo

$$x_3(\lambda) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right],$$

si ottiene nuovamente

$$\lambda \geq 2.$$

Pertanto $x_3(\lambda)$ è un punto fisso se e solo se $\lambda \in [2, 4]$.

Per $\lambda > 2$, il punto $x_3(\lambda)$ appartiene all'interno di J_3 e $|f'_\lambda(p_3(\lambda))| = \lambda > 2$, per cui $x_3(\lambda)$ è repulsivo.

Per $\lambda = 2$, si ha $x_3(2) = \frac{1}{2} = x_2(2)$, e quindi è repulsivo.

Punti fissi in J_4 . L'equazione dei punti fissi diventa

$$4(1 - x) = x \implies x = \frac{4}{5}.$$

Il punto fisso $x_4 = \frac{4}{5}$ appartiene a J_4 ed esiste per ogni $\lambda \in (0, 4]$.

Poiché $|f'_\lambda(x)| = 4$ in J_4 , x_4 è repulsivo per ogni $\lambda \in (0, 4]$.

(b). Consideriamo l' f_λ -grafo relativo alla partizione $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$. Per ogni $\lambda \in (0, 4]$ si ha

$$f_\lambda(J_1) = f_\lambda(J_4) = [0, 1],$$

quindi sono sempre presenti gli archi

$$J_1 \longrightarrow J_4, \quad J_4 \longrightarrow J_1.$$

Esiste quindi, per ogni $\lambda \in (0, 4]$, il cammino chiuso ammissibile $J_1 J_4 J_1$. Ne segue che esiste $\bar{x} \in J_1$ tale che $f_\lambda^2(\bar{x}) = \bar{x}$ e $f_\lambda(\bar{x}) \in J_4$. Quindi e la cui orbita segue l'itinerario $J_1 J_4$. Poiché $J_1 \cap J_4 = \emptyset$, $\bar{x}$ non può essere fisso, quindi è un punto periodico di periodo minimo 2 che esiste per ogni $\lambda \in (0, 4]$.

Studiamo ora la stabilità delle orbite periodiche di periodo minimo 2. L'orbita di $\bar{x}$ è repulsiva, infatti

$$|(f_\lambda^2)'(\bar{x})| = |f_\lambda'(\bar{x})||f_\lambda'(f_\lambda(\bar{x}))| = 16 > 1.$$

Resta da stabilire se possano esistere altre orbite periodiche di periodo minimo 2 attrattive.

Se $\lambda > 1$, in ogni ramo si ha $|f_\lambda'| > 1$, e quindi per ogni orbita periodica di periodo 2 che non contiene punti di non derivabilità, si ha

$$|(f_\lambda^2)'(x)| > 1.$$

La medesima proprietà di espansione vale lateralmente nei punti di non derivabilità. Pertanto, per $\lambda > 1$ non possono esistere orbite periodiche attrattive.

Poniamo $0 < \lambda \leq 1$. Un'orbita periodica di periodo 2 attrattiva deve necessariamente avere almeno un punto in $J_2 \cup J_3$. Poichè

$$f_\lambda(J_2) = f_\lambda(J_3) = \left[1 - \frac{\lambda}{4}, 1\right] \subseteq J_4,$$

deve alternare uno di questi due intervalli con J_4 .

Cerchiamo $x \in J_2$ tale che $f_\lambda(x) \in J_4$ e $f_\lambda^2(x) = x$. Per questa scelta si ha

$$f_\lambda^2(x) = 4 \left[1 - \left(1 - \lambda \left(x - \frac{1}{4} \right) \right) \right] = 4\lambda \left(x - \frac{1}{4} \right).$$

Quindi

$$4\lambda \left(x - \frac{1}{4} \right) = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lambda}{4\lambda - 1}.$$

La condizione

$$x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$$

è verificata se e solo se $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Poichè

$$|(f_\lambda^2)'(x)| = |(-4)(-\lambda)| = 4\lambda,$$

Quando l'orbita esiste, si ha

$$|(f_\lambda^2)'(x)| = 4\lambda \geq 2,$$

e quindi questa orbita è repulsiva.

Lo stesso ragionamento si ripete cercando $x \in J_3$ tale che $f_\lambda(x) \in J_4$ e $f_\lambda^2(x) = x$. Per questa scelta si ha

$$f_\lambda^2(x) = 4 \left[1 - \left(1 + \lambda \left(x - \frac{3}{4} \right) \right) \right] = 4\lambda \left(\frac{3}{4} - x \right).$$

Quindi

$$4\lambda \left(\frac{3}{4} - x \right) = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3\lambda}{1 + 4\lambda}.$$

La condizione

$$x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$$

è verificata se e solo se $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Anche in questo caso, quando l'orbita esiste

$$|(f_\lambda^2)'(x)| = |(-4)\lambda| = 4\lambda \geq 2,$$

per cui anche questa orbita è repulsiva.

In conclusione, non esistono orbite periodiche di periodo minimo 2 attrattive per alcun $\lambda \in (0, 4]$.

(c). Come abbiamo osservato sopra, nell' f_λ -grafo sono presenti per ogni $\lambda \in (0, 4]$ gli archi

$$J_1 \longrightarrow J_1, \quad J_1 \longrightarrow J_4, \quad J_4 \longrightarrow J_1.$$

Possiamo pertanto considerare il cammino chiuso ammissibile $J_1 J_1 J_4 J_1$, e poichè $J_1 \cap J_4 = \emptyset$, per ogni $\lambda \in (0, 4]$ esiste un'orbita periodica di periodo minimo 3.

Per mappe continue dell'intervallo, questa condizione implica che la mappa è caotica. Quindi f_λ è caotica per ogni $\lambda \in (0, 4]$.