Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 17-09-2014

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \tan(2x^2 + 3y^2)$$

i) studiare l'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x\sqrt{y}}$$

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1\,,\ y \ge \frac{4}{5} \right\}.$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{x^3\, y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,,\ (x-1)^2 + y^2 \le 1\,,\ y \ge 0 \big\}$.

Esercizio 3. (12 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-1,1]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\log(1+t^2)\,,\ t + \cos(t) \Big)$$

i) dire se la curva è regolare;

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (0\,,\,1)$;

iii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)} \end{pmatrix}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \tan(2x^2 + 3y^2)$$

i) studiare l'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x\sqrt{y}}$$

La funzione è la composizione della funzione tangente e di un polinomio, dunque è definita quando l'argomento della tangente è diverso da $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Poiché $2x^2 + 3y^2 \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$\mathrm{Dom}(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x^2 + 3y^2 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\,,\, k \in \mathbb{N} \right\}\,,$$

che geometricamente è $\mathbb{R}^2$ meno infinite ellissi sempre più grandi. Il denominatore della frazione che si chiede di studiare nel limite è definito per $y \geq 0$ e $x\sqrt{y} \neq 0$, che corrisponde al primo e secondo quadrante del piano meno gli assi. Dunque $(0,0)$ è un punto di accumulazione per la frazione che dobbiamo studiare, e ha senso studiare il limite richiesto.

Iniziamo a studiare il comportamento del limite lungo le rette della forma $y = \lambda x$, con $\lambda > 0$ (siamo nel primo quadrante del piano). Si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)\,,\,y=\lambda x} \frac{f(x,y)}{x\sqrt{y}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x,\lambda x)}{x\sqrt{\lambda x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan\Big((2+3\lambda^2)\,x^2\Big)}{\sqrt{\lambda}\,x^{\frac{3}{2}}} = 0$$

poiché $\tan x^2 \sim x^2$ per $x \to 0$. Lo stesso succede se studiamo le rette nel secondo quadrante.

Per trovare un limite diverso da 0, dobbiamo rendere dello stesso ordine numeratore e denominatore. Proviamo con la restrizione $y = x^2$. Si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)\,,\,y=x^2} \frac{f(x,y)}{x\sqrt{y}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,x^2)}{x\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x^2+3x^4)}{x\,|x|}$$

e, ragionando come sopra per la tangente, si trova che questo limite è uguale a $+2$ se $x \to 0^+$, ed è uguale a -2 se $x \to 0^-$.

Possiamo concludere che il limite richiesto non esiste.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\ y \geq \frac{4}{5} \right\}.$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 1, e osserviamo che è interamente contenuto nel dominio di f.

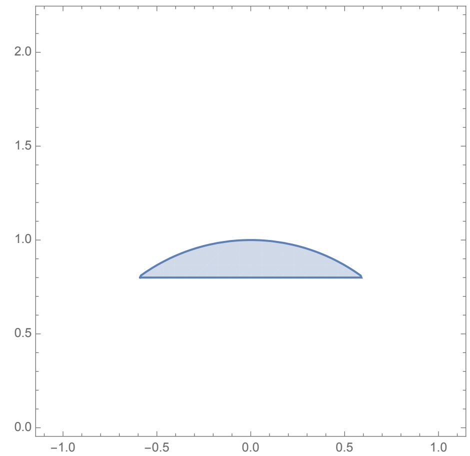

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f è di classe C^1 sul suo dominio, quindi non ci sono punti di non derivabilità e per trovare i punti critici dobbiamo risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} \frac{4x}{\cos^2(2x^2+3y^2)} = 0 \\ \frac{6y}{\cos^2(2x^2+3y^2)} = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione $(0,0)$ del sistema non appartiene a $\bar{\Omega}$, dunque non dobbiamo considerare i punti critici.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Il bordo è composto di due parti, gli insiemi

$$\Gamma_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\frac{3}{5} \le x \le \frac{3}{5} \,,\, y = \frac{4}{5} \right\} \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 = 1 \,,\, y \ge \frac{4}{5} \right\} .$$

Dunque gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} .$$

Per studiare il comportamento di f su Γ_1 usiamo la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[-\frac{3}{5} \,,\, \frac{3}{5} \right]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \tan\left(2t^2 + \frac{48}{25} \right) , \qquad t \in \left[-\frac{3}{5} \,,\, \frac{3}{5} \right]$$

Abbiamo

$$g_1'(t) = \frac{4t}{\cos^2(2t^2 + \frac{48}{25})}$$

dunque l'unico punto critico è $t_0 = 0$. Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} .$$

Per studiare il comportamento di f su Γ_2 usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con la funzione

$$G_2(x, y) = x^2 + y^2 .$$

Dobbiamo dunque cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla G_2(x,y) \\ G_2(x,y) = 1 \\ y \geq \frac{4}{5} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{4x}{\cos^2(2x^2+3y^2)} = 2\lambda x \\ \frac{6y}{\cos^2(2x^2+3y^2)} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq \frac{4}{5} \end{cases}$$

Analizzando la prima equazione, otteniamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{6y}{\cos^2(3y^2)} = 2\lambda y \\ y^2 = 1 \\ y \geq \frac{4}{5} \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{2}{\cos^2(2x^2+3y^2)} = \lambda \\ \frac{6y}{\cos^2(2x^2+3y^2)} = \frac{4y}{\cos^2(2x^2+3y^2)} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq \frac{4}{5} \end{cases}$$

e quindi a

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = \frac{3}{\cos^2(3)} \\ y = 1 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \lambda = \frac{2}{\cos^2(2)} \\ y = 0 \\ x^2 = 1 \\ y \geq \frac{4}{5} \end{cases}$$

Il secondo sotto-sistema non ha soluzione, dunque troviamo il punto critico vincolato

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = f(S_2) = \tan\left(\frac{66}{25}\right), \quad f(Q_1) = \tan\left(\frac{48}{25}\right), \quad f(Q_2) = \tan(3) .$$

per cui il massimo di f è $\tan(3)$ e il minimo è $\tan\left(\frac{48}{25}\right)$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{x^3\, y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,,\, (x-1)^2+y^2 \le 1\,,\, y \ge 0\big\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

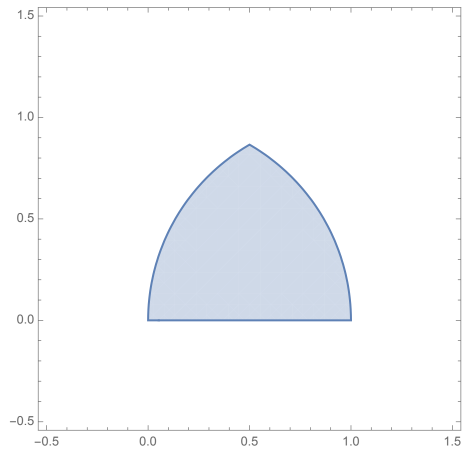

Figure 2: L'insieme Ω.

Risolviamo l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \iint_S \rho^4\, \cos^3\theta\, \sin\theta\, d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \big\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, \rho^2 \le 1\,,\, \rho^2 - 2\rho\cos\theta \le 0\,,\, \rho\sin\theta \ge 0\big\}$$

La prima e la terza condizione ci dicono che

$$0 \le \rho \le 1 \quad \text{e} \quad \theta \in [0,\pi]$$

mentre la seconda condizione è equivalente a

$$\rho \le 2\cos\theta\,.$$

Osserviamo innanzitutto che se $\theta > \frac{\pi}{2}$ si ha $\cos\theta < 0$, dunque la disequazione $\rho \le 2\cos\theta$ ha soluzione solo per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Siamo quindi arrivati a

$$S = \Big\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,, 0 \le \rho \le 1\,,\, \rho \le 2\cos\theta\Big\}$$

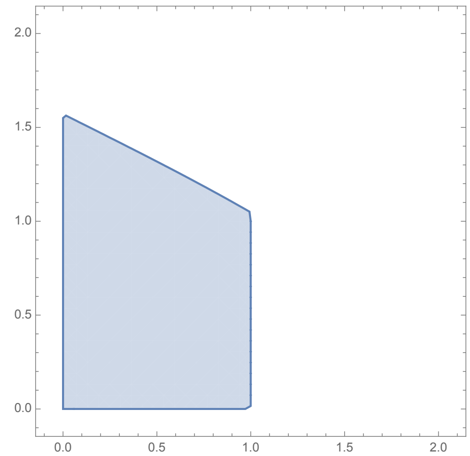

Figure 3: L'insieme S.

L'insieme S è rappresentato nella figura 3, e per scriverlo come insieme semplice dobbiamo trovare $\bar{\theta} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che $2\cos\bar{\theta} = 1$. Si trova $\bar{\theta} = \frac{\pi}{3}$, quindi

$$S = \Big\{(\rho,\theta) \,:\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\,, 0 \le \rho \le 1\Big\} \bigcup \Big\{(\rho,\theta) \,:\, \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,, 0 \le \rho \le 2\cos\theta\Big\}\,.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\,dy = \iint_S \rho^4\,\cos^3\theta\,\sin\theta\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^1 \rho^4\,\cos^3\theta\,\sin\theta\,d\rho\right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho^4\,\cos^3\theta\,\sin\theta\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{5}\cos^3\theta\,\sin\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5}\cos^8\theta\,\sin\theta\,d\theta =$$

$$= -\frac{1}{20}\left(\cos^4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{32}{45}\left(\cos^9\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{320} + \frac{1}{20} + \frac{1}{720} = \frac{139}{2880}\,.$$

Esercizio 3. *Data la curva (γ, I), con $I = [-1,1]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\log(1+t^2)\,,\, t + \cos(t)\Big)$$

i) dire se la curva è regolare;

Bisogna determinare se ci sono punti interni all'intervallo I in cui si annulla il vettore velocità $\gamma'(t)$. Essendo

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^2} \\ 1-\sin(t) \end{pmatrix}\,,$$

il sistema

$$\begin{cases} \frac{2t}{1+t^2} = 0 \\ 1 - \sin(t) = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni. Dunque la curva è regolare.

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (0\,,\,1)$;

Innanzitutto troviamo $t_0 \in I$ tale che $\gamma(t_0) = P$ risolvendo

$$\begin{cases} \log(1 + t_0^2) = 0 \\ t_0 + \cos(t_0) = 1 \end{cases}$$

Quindi $t_0 = 0$. La retta tangente al sostegno di (γ, I) nel punto P è dunque generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi un vettore ortogonale alla retta è in vettore

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto P è quindi

$$1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0\,.$$

iii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) =$$

$$= y\,\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\,\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)} - x\,\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\,\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)} =$$

$$= -y\,\frac{2x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)^2} + x\,\frac{2y + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)^2} = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Essendo il suo dominio non semplicemente connesso, per vedere se $\mathbf{F}$ è anche conservativo, dobbiamo valutare il suo lavoro lungo una curva chiusa che vada intorno al "buco" $(0,0)$. Scegliamo la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = \Big(\cos t\,,\,\sin t\Big) \quad \text{con} \quad t \in [0,2\pi]\,.$$

Si trova

$$L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_0^{2\pi} \Big(-\sin t\,F_1(\cos t,\sin t) + \cos t\,F_2(\cos t,\sin t)\Big)\,dt = 0\,,$$

quindi il campo $\mathbf{F}$ è anche conservativo.

Possiamo allora scrivere che se $f(x,y)$ è un potenziale del campo, essendo la curva (γ, I) non chiusa, con punto iniziale $P = \gamma(-1) = (\log(2), -1+\cos(-1))$ e punto finale $Q = \gamma(1) = (\log(2), 1+\cos(1))$, abbiamo

$$L(\mathbf{F},\gamma) = f(Q) - f(P) = f(\log(2), 1+\cos(1)) - f(\log(2), -1+\cos(-1))\,.$$

Cerchiamo quindi un potenziale f. Dobbiamo quindi trovare una soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\,\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)} \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo

$$f(x,y) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\,\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}\,dx = \int \left(\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx =$$

$$= \log\Big(1+\sqrt{x^2+y^2}\Big) + g(y)\,.$$

Sostituendo nella seconda troviamo

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)} + g'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

da cui $g'(y) = 0$, e quindi $g(y) = \textit{costante}$. Tutti i potenziali del campo $\mathbf{F}$ sono quindi della forma

$$f(x,y) = \log\Big(1+\sqrt{x^2+y^2}\Big) + c\,.$$

Otteniamo allora

$$L(\mathbf{F},\gamma) = f(\log(2), 1+\cos(1)) - f(\log(2), -1+\cos(-1)) = \log\left(\frac{1+\sqrt{\log^2(2)+(1+\cos(1))^2}}{1+\sqrt{\log^2(2)+(-1+\cos(1))^2}}\right)\,.$$